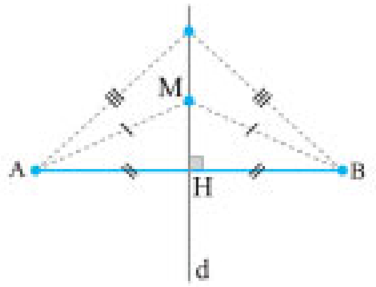
آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

مکان هندسی

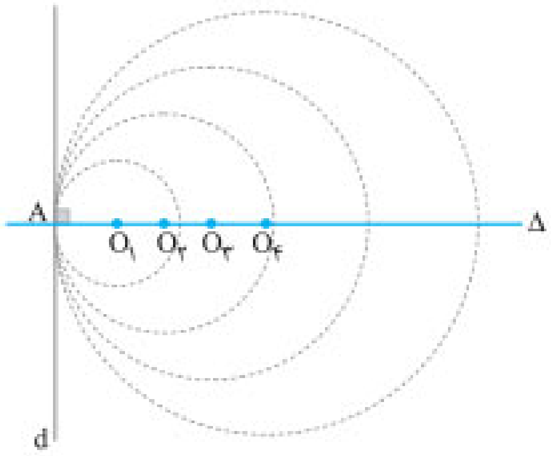
تعریف: مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک دارند و هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه است.

چهار مکان هندسی مهم



الف) عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند. زیرا:

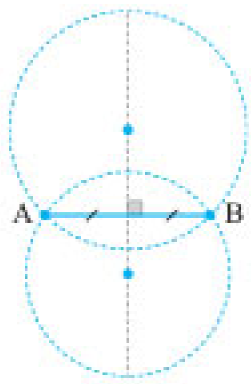
- هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.
- هر نقطه‌ای از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط است. $\forall M \in d\,;\ (d \perp AB \wedge HA = HB) \Leftrightarrow MA = MB$



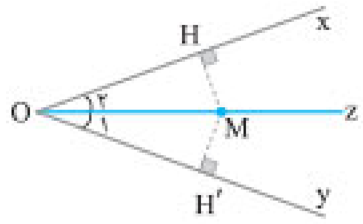
نتیجه: (۱) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ ثابت A، بر خط ثابت d در صفحه مماس‌اند، یک خط راست است که در نقطهٔ A بر خط d عمود می‌باشد.

- خط Δ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که در نقطهٔ A بر خط ثابت d مماس‌اند.

$(\Delta \cap d = A\,,\Delta \perp d)$



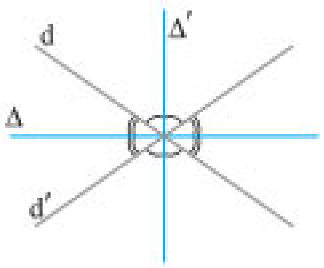
(۲) مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



ب) نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. زیرا:

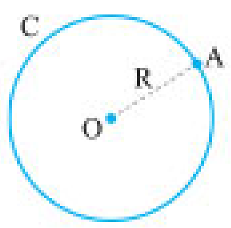
- هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
- هر نقطه‌ای از صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه است.

$\forall M \in Oz\,;(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \Leftrightarrow MH = MH'$



نتیجه: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع است.

- دو خط Δ و Δ' مکان هندسی نقاطی از صفحه‌اند که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. دو خط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع d و d' هستند و همواره بر هم عمودند. $(\Delta \perp \Delta')$



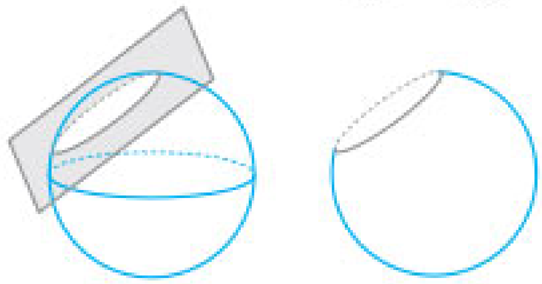
پ) دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه، به یک فاصله‌اند. (نقطهٔ ثابت، مرکز دایره و فاصلهٔ موردنظر، شعاع دایره است.) زیرا:

- هر نقطه روی دایره، از مرکز دایره به فاصلهٔ ثابت R است.
- هر نقطه‌ای که از مرکز دایره، به فاصلهٔ ثابت R باشد، روی دایره است.

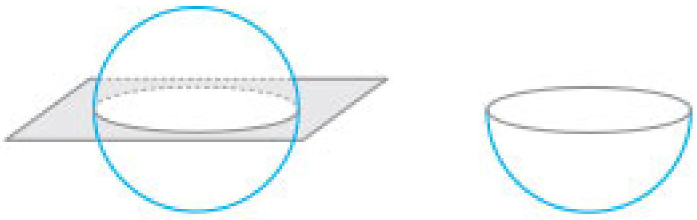
$\forall A\,; A \in C \Leftrightarrow OA = R$

مقطع کروی

اگر یک صفحه، سطح کروی را قطع کند، فصل مشترک صفحه با سطح کروی، همواره یک دایره است.



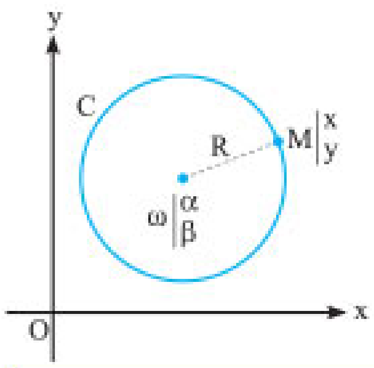
حالت خاص اگر صفحهٔ قاطع، از مرکز سطح کروی بگذرد، بزرگ‌ترین دایرهٔ ممکن (دایرهٔ بزرگ یا عظیمه) پدید می‌آید.



دایـره

معادلهٔ دایره

اگر دایرهٔ C را در یک دستگاه مختصات دوبعدی در نظر بگیریم، می‌توانیم معادلهٔ آن را به کمک تعریف دایره بیابیم.
برای این منظور مختصات مرکز دایره را به‌صورت $\omega(\alpha,\beta)$(با توجه به اینکه مبدأ مختصات نقطهٔ $O(0,0)$ می‌باشد، مرکز دایره را با ω (اُمگا) نشان می‌دهیم) و شعاع آن را R در نظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ $M(x,y)$، نقطه‌ای متغیر روی دایره باشد، آن‌گاه داریم:



$$\omega M=R\Rightarrow\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R\xrightarrow{\text{توان }2}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ C به مرکز $\omega(\alpha,\beta)$ و شعاع R عبارت است از:

$$\boxed{C:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

- معادلهٔ دایره به‌صورت بالا، معادلهٔ استاندارد دایره یا معادلهٔ مربع کامل نامیده می‌شود.
- معادلهٔ دایره همواره برحسب x و y از درجهٔ دوم است.
- برای یافتن معادلهٔ دایره، مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن مورد نیاز است.

برای نمونه: معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $\omega(2,3)$ و شعاع $R=4$ عبارت است از: $C:(x-2)^2+(y-3)^2=4^2=16$

- معادلهٔ دایره به شعاع R، در حالت خاصی که مرکز دایره، بر مبدأ مختصات منطبق می‌شود (یعنی $\alpha=\beta=0$)، عبارت است از: $C:x^2+y^2=R^2$

تست: دایرهٔ به مرکز $(2,-1)$ و شعاع ۲، محورهای مختصات را در چند نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ گزینه ۳ ابتدا معادلهٔ دایره را می‌نویسیم: $C:(x-2)^2+(y-(-1))^2=2^2\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=4$

اکنون کافی است این معادله را با محورهای مختصات قطع دهیم. ابتدا تقاطع با محور xها را در نظر می‌گیریم:

$$y=0\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(x-2)^2+(0+1)^2=4\Rightarrow(x-2)^2=3\xrightarrow{\text{جذر}}x-2=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$

پس این دایره، محور xها را در دو نقطهٔ $(2+\sqrt{3},0)$ و $(2-\sqrt{3},0)$ قطع می‌کند. حال برای تقاطع با محور yها داریم:

$$x=0\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(0-2)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow(y+1)^2=0\Rightarrow y=-1$$

یعنی دایره، با محور yها یک نقطهٔ مشترک دارد. به عبارت دیگر بر محور yها مماس است؛ پس دایره، محورهای مختصات را در سه نقطه قطع می‌کند.

معادلهٔ دایره به مرکز $(1,-1)$ که بر خط $\Delta: 3x-4y+3=0$، وتری به طول ۶ جدا می‌کند، کدام است؟

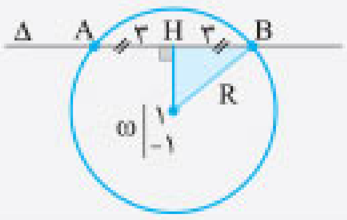
۱) $x^2+y^2-2x+2y=13$
۲) $x^2+y^2-2x+2y=11$
۳) $x^2+y^2-2x+2y=8$
۴) $x^2+y^2-2x+2y=9$

پاسخ گزینه ۲

یادآوری: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $\Delta: ax+by+c=0$ برابر است با: $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

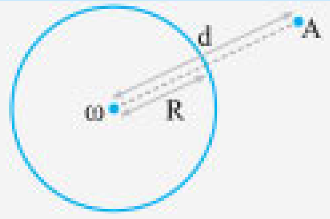
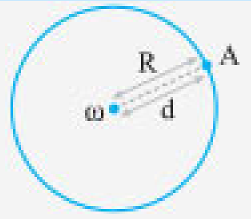
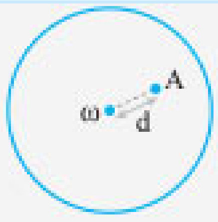
قاصلهٔ مرکز دایره تا خط Δ برابر است با:

$$\omega H=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$



وضعیت نسبی نقطه و دایره

اگر معادلهٔ دایره را به‌صورت ضمنی $f(x,y)=۰$ در نظر بگیریم و نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$، نقطه‌ای در صفحه فرض شود، آن‌گاه برای تشخیص وضعیت (جای) نقطهٔ A نسبت به دایره، مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم (به عبارت دیگر $f(x_۰,y_۰)$ را محاسبه می‌کنیم که حاصل یک عدد حقیقی است. برحسب مثبت، صفر یا منفی شدن این عدد، وضعیت نقطهٔ A قابل تشخیص است. (این عدد را قوت نقطه نسبت به دایره می‌گویند.)

شکل هندسی	 $d>R$	 $d=R$	 $d<R$
قوت نقطه	$f(x_۰,y_۰)>۰$	$f(x_۰,y_۰)=۰$	$f(x_۰,y_۰)<۰$
وضعیت نقطه	خارج دایره	روی دایره	داخل دایره
تعداد مماس‌های قابل رسم از نقطه بر دایره	۲	۱	۰

برای نمونه: نقطهٔ $A(۲,۱)$ درون دایرهٔ $C: x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰$ است، زیرا: $f(۲,۱)=۲^۲+۱^۲-۲(۲)-۴(۱)+۱=-۲<۰$

تست: از نقطهٔ $A(۲,۲)$ چند مماس بر دایرهٔ $C: x^۲+y^۲-۲x+۴y-۶=۰$ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

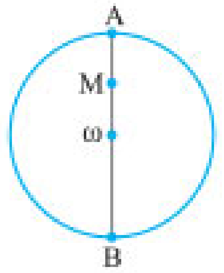
پاسخ (گزینه ۳) ابتدا وضعیت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ C بررسی می‌کنیم:

$$f(۲,۳)=۲^۲+۳^۲-۲(۲)+۴(۳)-۶=۱۵>۰$$

از آن‌جایی که عدد حاصل، مثبت است: پس نقطهٔ A در خارج دایرهٔ C قرار دارد و از نقطه A، می‌توان ۲ مماس بر دایره رسم کرد.

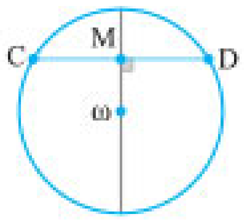
وتر ماکزیمم، وتر مینیمم

اگر نقطهٔ M درون دایره باشد:



الف) بزرگ‌ترین (بلندترین) وتر گذرا از نقطهٔ M، قطری از دایره است که از نقطهٔ M می‌گذرد.

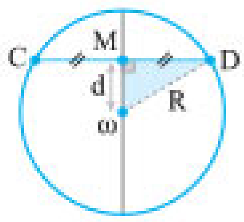
وتر ماکزیمم نقطهٔ M : $AB=۲R$



ب) کوتاه‌ترین وتر گذرا از نقطهٔ M، وتری از دایره است که در نقطهٔ M، بر وتر ماکزیمم آن، عمود است.

وتر مینیمم نقطهٔ M : CD

◂ برای یافتن طول وتر مینیمم نقطهٔ M به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$CD=۲\sqrt{R^۲-d^۲}$$

ترفند محاسباتی: اگر نقطهٔ $M(x_۰,y_۰)$ درون دایرهٔ C به معادلهٔ ضمنی $f(x,y)=۰$ فرض شود، آن‌گاه طول وتر مینیمم نقطهٔ M برابر است با: $۲\sqrt{|f(x_۰,y_۰)|}$

تست: طول کوتاه‌ترین وتر از دایرهٔ $C: x^۲+(y-۳)^۲=۱۶$ که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۸

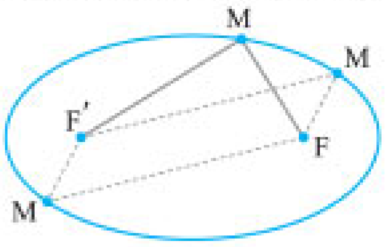
پاسخ (گزینه ۲) طول وتر مینیمم نقطهٔ $(۲,۱)$ موردنظر است که برابر است با:

$$۲\sqrt{|f(۲,۱)|}=۲\sqrt{|(۲)^۲+(۱-۳)^۲-۱۶|}=۲\sqrt{|-۸|}=۲\sqrt{۸}=۴\sqrt{۲}$$

بیضی و سهمی

بیضی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت صفحه، همواره برابر با مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهند و به آن مقدار **ثابت بیضی** می‌گویند.



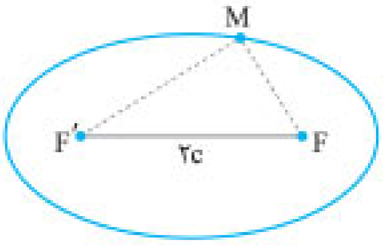
◄ دو نقطهٔ ثابت صفحه را کانون‌های بیضی می‌نامند و با F و F' نشان می‌دهند.

◄ اگر M نقطه‌ای متغیر روی بیضی باشد، آن‌گاه: $MF+MF'=۲a$

◄ فاصلهٔ بین دو کانون بیضی را فاصلهٔ کانونی می‌گویند و با $۲c$ نشان می‌دهند: بنابراین: $FF'=۲c$

◄ در هر بیضی با مقدار ثابت $۲a$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ همواره داریم: $۲a>۲c$

برای اثبات کافی است در مثلث MFF'، نامساوی مثلثی را بنویسیم:



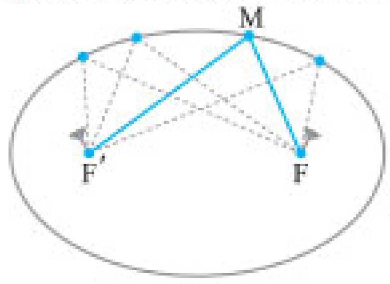
$$\overset{\Delta}{MFF'}: \underbrace{MF+MF'}_{۲a} > \underbrace{FF'}_{۲c} \Rightarrow ۲a>۲c$$

● **دو حالت خاص:**

◄ **اگر $۲a=۲c$، مکان هندسی نقطهٔ M یک پاره‌خط است.**

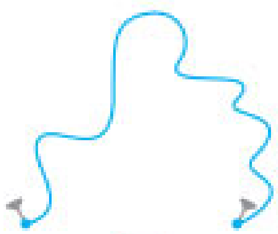
◄ **اگر $۲a<۲c$، مکان هندسی نقطهٔ M تهی است.**

◄ برای رسم بیضی (به روش بنّاهای ساختمانی)، دو میخ با فاصلهٔ مناسب در نظر می‌گیریم (توجه کنید که دو میخ، همان دو کانون بیضی می‌باشند، زیرا میخ‌ها نقاط ثابت صفحه‌اند و فاصلهٔ بین آن‌ها، همان فاصلهٔ کانونی بیضی است که با $۲c$ نمایش داده شد) و دو سر یک تکه نخ را، که طول آن از فاصلهٔ بین دو میخ بیشتر است (همان $۲a$)، به این دو میخ گره می‌زنیم (شکل ۱)، سپس یک مداد را داخل نخ قرار داده و آن را کشیده نگه می‌داریم (شکل ۲). با حرکت دادن نوک مداد داخل نخ (همانند یک شابلون)، طوری که در تمام لحظاتِ رسم، نخ به‌صورت صاف و کشیده باشد، یک بیضی حاصل می‌شود (شکل ۳).



۳

۲



۱

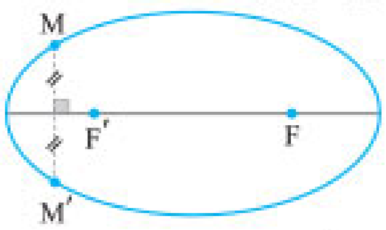
توجه: ● طول نخ ($۲a$) باید از فاصلهٔ دو میخ ($۲c$) بیشتر باشد، تا شکلِ بیضی رسم شود.

● در تمام لحظاتِ رسم، مجموع دو قسمت نخ، با طول نخ ($۲a$) همواره برابر است. یعنی: $MF+MF'=۲a$

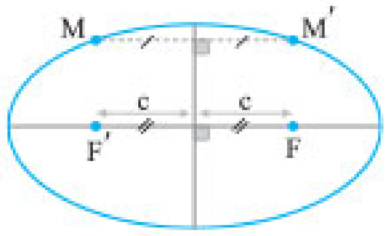
● اگر طول نخ، با فاصلهٔ بین دو میخ برابر باشد ($۲a=۲c$)، نخ بین دو میخ، محکم می‌شود و یک پاره‌خط به‌دست می‌آید، زیرا امکان حرکت مداد در داخل آن وجود ندارد.

◄ اگر طول نخ از فاصلهٔ دو میخ کمتر باشد ($۲a<۲c$)، امکان گره زدن دو سر آن به دو میخ وجود ندارد و شکلی حاصل نمی‌شود.

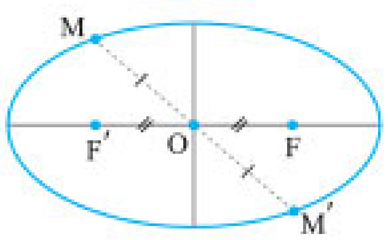
◄ در هر بیضی پاره‌خط FF' را امتداد می‌دهند و به آن محور کانونی بیضی می‌گویند. محور کـانونی بیضـی، محور تقارن آن نیز می‌باشد. یعنی بازتاب هر نقطه‌ای از منحنی بیضی (مانند M)، نسبت به محور کانونی، نقطه‌ای دیگر روی منحنی بیضی است (نقطهٔ M').



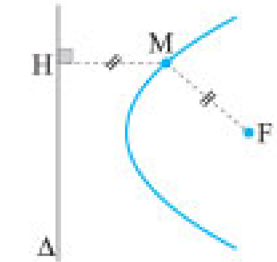
◄ در هر بیضی عمودمنصف پاره‌خط FF'، محور غیرکانونی (ناکانونی) بیضی نامیده می‌شود، که محور تقارن بیضی نیز است.



◄ در هر بیضی، نقطهٔ وسط پاره‌خط FF' (نقطهٔ تقاطع محورهای کانونی و غیرکانونی بیضی) مرکز بیضی است که مرکز تقارن آن نیز محسوب می‌شود، یعنی بازتاب هر نقطه‌ای از منحنی بیضی، نسبت به این نقطه، نقطه‌ای دیگر روی منحنی بیضی است.

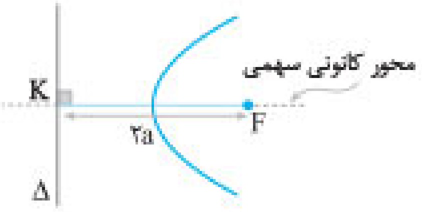


سهمی

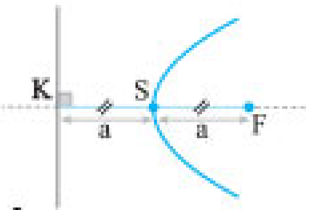


تعریف: مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در صفحه و از یک نقطهٔ ثابت، غیرواقع بر آن خط، در همان صفحه به یک فاصله‌اند.

- خط ثابت در صفحه را خط هادی سهمی و نقطه ثابت صفحه را کانون سهمی می‌گویند.
- بنابراین اگر M نقطه‌ای متغیر روی سهمی با کانون F و خط هادی Δ باشد، آن‌گاه: $\boxed{MF=MH}$
- فاصلهٔ کانون هر سهمی از خط هادی آن همواره مقداری ثابت است که این مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهند.
- خطی که از کانون یک سهمی بر خط هادی سهمی عمود می‌شود، محور کانونی سهمی یا محور سهمی نامیده می‌شود.



- محور کانونی سهمی، منحنی سهمی را در نقطهٔ S قطع می‌کند، که به آن رأس سهمی گفته می‌شود.
- رأس سهمی نقطه‌ای روی سهمی است؛ پس در تعریف سهمی صدق می‌کند. به عبارت دیگر رأس سهمی از کانون سهمی و خط هادی آن به یک فاصله است؛ بنابراین رأس سهمی همواره وسط کانون و خط هادی سهمی می‌باشد. $\boxed{SF=SK=a}$



- فاصلهٔ کانون سهمی تا رأس آن را فاصلهٔ کانونی سهمی می‌نامند و آن را با عدد مثبت a نشان می‌دهند.
- اگر محور کانونی سهمی موازی با محور xها یا منطبق بر آن باشد سهمی را افقی و اگر محور کانونی سهمی موازی با محور yها یا منطبق بر آن باشد، سهمی را قائم می‌گویند.
- سهمی افقی یا قائم را سهمی استاندارد نیز می‌گویند (در این کتاب فقط سهمی‌های استاندارد مورد بررسی قرار می‌گیرند).

تست: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از یک نقطه ثابت F در صفحه می‌گذرند و بر یک خط ثابت Δ در همان صفحه مماس‌اند کدام است؟ (خط Δ از نقطهٔ F نمی‌گذرد.)

۱) یک خط راست عمود بر خط Δ
۲) سهمی به کانون F و خط هادی Δ
۳) دایره‌ای به مرکز F و شعاع ثابت
۴) بیضی که یکی از کانون‌های آن F و مماس بر خط Δ است.

پاسخ (گزینه ۲) اگر M مرکز دایرهٔ گذرا از نقطهٔ F و مماس بر خط Δ باشد، واضح است که فاصلهٔ M از نقطهٔ F و از خط Δ با هم برابر و مساوی با شعاع دایره‌اند؛ پس مرکز این دایره‌ها، نقاطی تشکیل می‌دهند که از یک نقطهٔ ثابت صفحه (F) و از یک خط ثابت در همان صفحه (خط Δ) به یک فاصله‌اند؛ لذا روی یک سهمی قرار دارند.

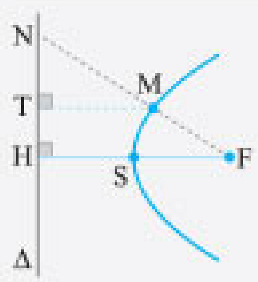
نتیجه: تعریف دیگری از سهمی

مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از یک نقطهٔ ثابت صفحه می‌گذرند و بر یک خط ثابت در همان صفحه مماس‌اند (خط ثابت از نقطهٔ ثابت نمی‌گذرد)، سهمی است. نقطهٔ ثابت، کانون سهمی و خط ثابت، خط هادی سهمی می‌باشد.

مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از خارج بر دایرهٔ ثابت C در صفحه و نیز بر خط ثابت Δ در همان صفحه، مماس‌اند، کدام است؟

۱) دایره
۲) سهمی
۳) بیضی
۴) خط راست

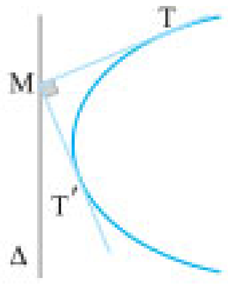
پاسخ (گزینه ۲) با توجه به شکل، دایرهٔ ثابت C به مرکز O و شعاع R مفروض است. واضح است که فاصلهٔ مرکز هر دایرهٔ به شعاع r که بر دایرهٔ C مماس خارج می‌باشد، از مرکز دایرهٔ C برابر با $r+R$ است. حال اگر خط d را موازی با خط Δ و به فاصلهٔ R از آن (مطابق شکل) رسم کنیم، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز هر دایرهٔ به شعاع r، که بر خط Δ مماس می‌باشد، از خط d برابر با $r+R$ است؛ یعنی اگر نقطهٔ M مرکز یکی از دایره‌های مطلوب باشد، آن‌گاه $MO=MH$؛ بنابراین مرکز دایره‌های مطلوب، از یک نقطهٔ ثابت صفحه (مرکز دایرهٔ C) و از یک خط ثابت در همان صفحه (خط d به فاصلهٔ R از خط Δ) به یک فاصله‌اند؛ پس روی سهمی به کانون O و خط هادی d قرار دارند.



در شکل مقابل، سهمی با رأس S، کانون F و خط هادی Δ رسم شده است. از نقطهٔ F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده تا خط Δ را در نقطهٔ N قطع کند و از نقطهٔ M عمود MT را بر خط Δ رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{FN}{FS}$ با کدام برابر است؟

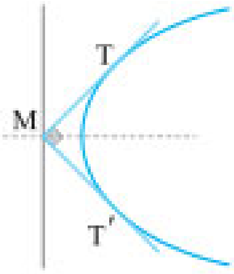
۱) $\frac{MT}{FH}$
۲) $\frac{2NT}{TH}$
۳) $\frac{NH}{NF}$
۴) $\frac{2MN}{TN}$

خط هادی سهمی به عنوان یک مکان‌هندسی



مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط بتوان دو خط مماس عمود بر هم بر سهمی رسم کرد، خط هادی سهمی است.

به عبارت دیگر، اگر از نقطهٔ M واقع بر خط هادی یک سهمی، دو مماس MT و MT′ را بر سهمی رسم کنیم، آن‌گاه $MT \perp MT'$.



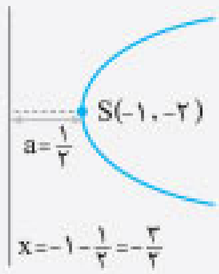
حالت خاص اگر از نقطهٔ تقاطع محور تقارن سهمی و خط هادی آن، دو مماس بر سهمی رسم شود، آن‌گاه طول دو مماس با هم برابر است و هر دو خط مماس بر هم عمودند.

$$(MT = MT', MT \perp MT')$$

تست: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط بتوان دو خط مماس عمود برهم بر منحنی به معادلهٔ $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ رسم کرد، کدام است؟

۱) $x = -\frac{3}{2}$　۲) $x = \frac{1}{2}$　۳) $x = -\frac{1}{2}$　۴) $x = \frac{3}{2}$

پاسخ گزینه ۱ با توجه به معادلهٔ داده‌شده، یک سهمی افقی داریم که معادلهٔ خط هادی آن موردنظر است.

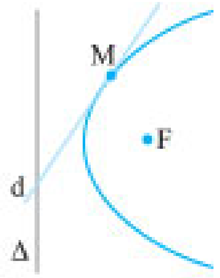


ابتدا معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

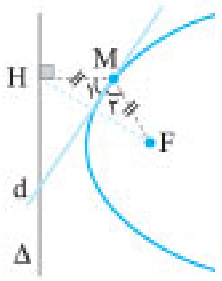
$$y^2 + 4y = 2x - 2 \Rightarrow (y+2)^2 - 4 = 2x - 2 \Rightarrow (y+2)^2 = 2x + 2 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+1)$$

واضح است که جهت دهانهٔ این سهمی رو به راست و مختصات رأس آن $S(-1, -2)$ است. از طرفی $4a = 2$ و در نتیجه $a = \frac{1}{2}$ است؛ پس معادلهٔ خط هادی آن $x = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ می‌باشد.

مماس بر سهمی و ویژگی بازتابندگی در آن



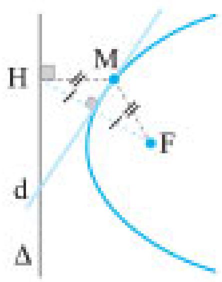
در هر نقطه واقع بر سهمی همواره یک مماس بر سهمی می‌توان رسم کرد. به عبارت دیگر در سهمی با کانون F و خط هادی Δ، اگر M نقطه‌ای روی سهمی باشد، آن‌گاه در نقطهٔ M خطی مانند d مماس بر سهمی وجود دارد.



نکته: ۱ خط مماس بر سهمی در نقطهٔ دلخواه M واقع بر سهمی به کانون F و خط هادی Δ، نیمساز زاویهٔ بین MF و MH است.

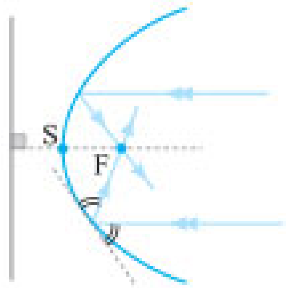
به عبارت دیگر می‌توان ثابت کرد: در مثلث متساوی‌الساقین MHF، خط مماس d، نیمساز زاویهٔ رأس M است. $(\hat{M}_1 = \hat{M}_2)$

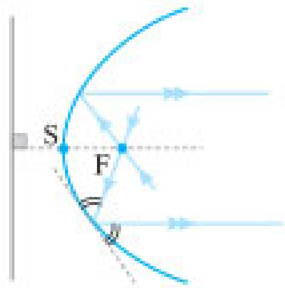
۲ بازتاب کانون هر سهمی، نسبت به هر خط مماس بر آن، همواره نقطه‌ای روی خط هادی سهمی است.



◀ برای اثبات کافی است در مثلث متساوی‌الساقین MHF به این موضوع توجه کنیم که خط d نیمساز زاویهٔ رأس M است، پس عمودمنصف قاعدهٔ HF نیز می‌باشد. بنابراین بازتاب نقطهٔ F، نقطهٔ H (روی خط هادی سهمی) است.

۳ اگر یک شعاع نور، از کانون سهمی به نقطه‌ای واقع بر سهمی بتابد (از این ویژگی سهمی در فیزیک نور، نظیر آینه‌های مقعر و محدب، ساخت چراغ خودرو و... استفاده می‌شود)، بازتاب آن موازی با محور سهمی است و برعکس اگر یک شعاع نور موازی با محور سهمی به نقطه‌ای واقع بر سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد.





◀ برای اثبات کافی است به این موضوع توجه کنید که طبق نکتهٔ ۱، شعاع تابش و بازتابش در نقطهٔ برخورد بر سهمی، با خط مماس در آن نقطه، زاویه‌های برابر می‌سازند.

۲۳۱. به ازای هر m، معادلهٔ $(m-2)x+(m+1)y=6-2m$، معادلهٔ قطری از دایرهٔ C است. اگر نقطهٔ $A(-1,1)$ روی دایرهٔ C باشد، محیط دایرهٔ C کدام است؟ (ریاضی تیر ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{2}\pi$ ۲) 2π ۳) 3π ۴) $2\sqrt{3}\pi$

۲۳۲. دایرهٔ $a(x^2+y^2-2x)+b(x^2+y^2-2y)=0$ از نقطهٔ $(2,-2)$ می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۲۳۳. نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(1,2)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۲۳۴. طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع ۲، که هر دو گذرا از دو نقطهٔ $A(1,2)$ و $B(3,4)$ هستند، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۵. طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(2,-1)$، $B(6,2)$ و $C(5,2)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۲۳۶. مثلث ABC، با رئوس $A\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}1\\-3\end{vmatrix}$ مفروض است. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. مساحت بین دایره و مثلث کدام است؟

۱) $4\pi-1$ ۲) $4\pi-8$ ۳) $4\pi-4$ ۴) $4\pi-2$

۲۳۷. نقاط $A(4,1)$، $B(0,1)$ و $C(4,3)$ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقادیری از m، نقطهٔ $(1,m)$ درون دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد؟

۱) $m\in\mathbb{R}-\{0,4\}$ ۲) $m\in\mathbb{R}-(0,4)$ ۳) $m\in(0,4)$ ۴) $m\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

۲۳۸. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلثی که از برخورد سه خط به معادلات $x=2$، $y=4$ و $x+3y=20$ ایجاد می‌شود، به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۵۸ ۳) -10 ۴) ۸۸

۲۳۹. خط Δ به معادلهٔ $2x+y=1$، دایرهٔ C به معادلهٔ $x^2+y^2-2x=1$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. اگر مرکز دایرهٔ C، نقطهٔ N فرض شود، دایرهٔ محیطی مثلث NAB، روی محور عرض‌ها وتری با کدام طول جدا می‌کند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۴۰. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-1,2)$ که بر خط $\Delta: x+2y-1=0$ مماس می‌باشد، کدام است؟

۱) $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{5}$ ۲) $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{2}{5}$

۳) $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{3}{5}$ ۴) $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$

۲۴۱. به ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $x=m(y+1)$ بر دایرهٔ $(x+1)^2+y(y+1)=1$ مماس است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۴۲. خط $2x+3y=9$ در نقطهٔ $(0,3)$، بر دایرهٔ $x^2+y^2+3x+ay=c$ مماس است. مقدار a کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۳/۵ ۲) $-3/5$

۳) ۱/۵ ۴) $-1/5$

۲۴۳. مختصات مرکز دایره‌ای که از نقطهٔ $(4/5, 0/5)$ بگذرد و بر خط $3x-2y=6$ در نقطهٔ $(2,0)$ مماس باشد، کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) $(2/5, 4)$ ۲) $(3, 1/5)$

۳) $(4, -3/5)$ ۴) $(3/5, -1)$

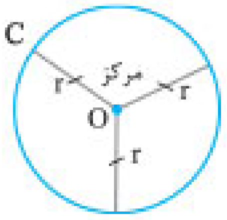
۲۴۴. معادلهٔ دایره‌ای که دو قطر آن خطوط $y=x+1$ و $y+2x+2=0$ باشند و بر خط به معادلهٔ $x+y+2=0$ مماس باشند، کدام است؟

۱) $2(x+1)^2+2(y+1)^2=1$ ۲) $(x+1)^2+y^2=\frac{1}{2}$

۳) $(x-1)^2+y^2=1$ ۴) $x^2+(y+1)^2=1$

مهروماه

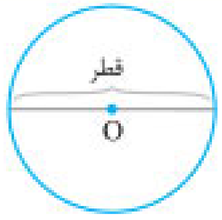
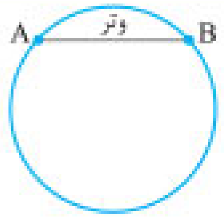
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



$C(O,r)$

تعریف: مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت به نام مرکز به فاصلهٔ یکسان هستند.

شعاع، وتر و قطر

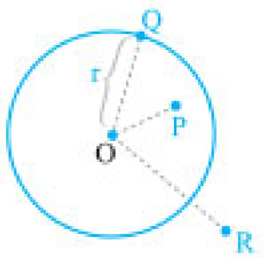
قطر	وتر	شعاع
 **قطر:** وتری که از مرکز دایره می‌گذرد. قطر دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. در واقع قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.	 **وتر:** پاره‌خطی که دو نقطهٔ روی دایره را به هم وصل می‌کند.	 **شعاع:** فاصلهٔ مرکز دایره تا نقاط روی دایره را می‌گویند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهند.

کمان: بخشی از منحنی دایره که توسط وتری از دایره جدا شده است. هر کمان روی دایره، منحنی دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند که اگر اندازهٔ آن از نیم‌دایره کوچک‌تر باشد، با دو سر کمان و اگر بزرگ‌تر باشد، معمولاً با سه حرف نشان داده می‌شود. در شکل مقابل، دو کمان EF و EMF دیده می‌شوند.

اندازهٔ هر کمان برحسب درجه بیان می‌شود. (می‌دانیم که منحنی یک دایره، به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و هر قسمت برابر ۱ درجه است.)

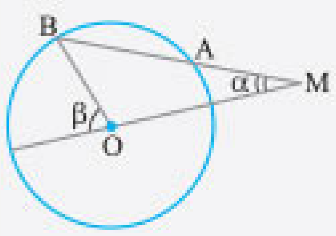
وضعیت نقطه و دایره

هر نقطه نسبت به دایره، سه وضعیت «داخل، روی و بیرون» دایره را دارد. تشخیص این موضوع، به فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره وابسته است.



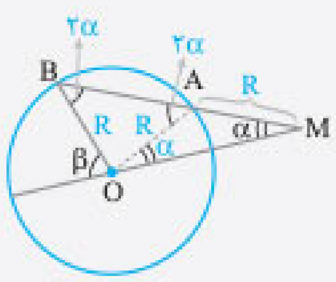
طرز تشخیص	وضعیت	نقطه
$OP < r$	درون دایره	P
$OQ = r$	روی دایره	Q
$OR > r$	بیرون دایره	R

تست: دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره، خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر $MA = R$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ β چند برابر اندازهٔ زاویهٔ α است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) $\frac{۴}{۳}$

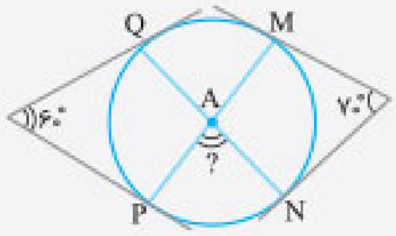
پاسخ گزینه ۲ از A به O وصل می‌کنیم. داریم:



$$OA = MA = R \xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{O\hat{A}M} A\hat{O}M = O\hat{M}A = \alpha \xrightarrow[\text{در } A\hat{O}M]{\text{زاویهٔ خارجی}} O\hat{A}B = ۲\alpha$$

$$\xrightarrow[OA=OB=R]{O\hat{A}B} \hat{B} = \hat{A} = ۲\alpha \xrightarrow[\text{در } O\hat{B}M]{\text{زاویهٔ خارجی}} \beta = \hat{B} + \hat{M} = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$

تست: در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۶۰ ۲) ۶۵
۳) ۷۰ ۴) ۷۵

پاسخ گزینه ۲ با توجه به قسمت «ب» در نتیجهٔ قبل داریم:

$$۷۰^\circ=\frac{(\widehat{QM}+\widehat{PQ}+\widehat{PN})-\widehat{MN}}{۲}\Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{PQ}+\widehat{PN}-\widehat{MN}=۱۴۰^\circ$$

$$۶۰^\circ=\frac{(\widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{PN})-\widehat{PQ}}{۲}\Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{PN}-\widehat{PQ}=۱۲۰^\circ$$

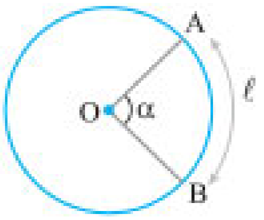
از جمع دو تساوی بالا داریم:

$$۲\widehat{QM}+۲\widehat{PN}=۲۶۰^\circ\Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{PN}=۱۳۰^\circ$$

از طرفی مطابق با زاویهٔ بین وترهای متقاطع درون دایره داریم:

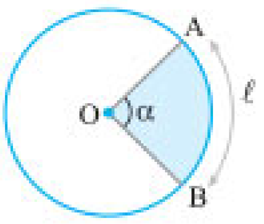
$$\hat{A}=\frac{\widehat{QM}+\widehat{PN}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

طول کمان، مساحت قطاع، مساحت قطعه



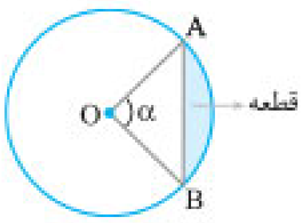
- طول کمان جداشده روی دایره، توسط زاویهٔ مرکزی α، برحسب واحد طول، عبارت است از:

$$\boxed{\ell=\frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha}$$



- ناحیهٔ محدود به دو ضلع هر زاویهٔ مرکزی و کمان روبه‌روی آن، **قطاع** نامیده می‌شود. مساحت هر قطاع با زاویهٔ مرکزی α عبارت است از:

$$\boxed{S=\frac{\pi R^۲}{۳۶۰^\circ}\alpha}$$

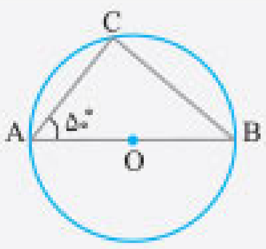


- ناحیهٔ محدود به یک وتر از دایره و کمان نظیر آن وتر، قطعه نامیده می‌شود. مساحت قطعه عبارت است از:

$$\boxed{S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع}}-S_{O\hat{A}B}}$$

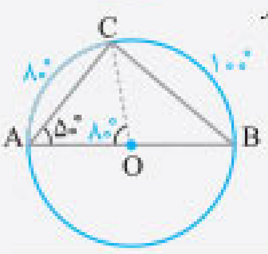
(در فصل سوم خواهید دید که مساحت مثلث OAB با توجه به $OA=OB=R$ و $A\hat{O}B=\alpha$، برابر است با $\frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha$. بنابراین مساحت قطعه، همواره به‌صورت $\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}-\frac{R^۲\sin\alpha}{۲}$ است.)

تست: در شکل مقابل اگر $AB=۲۷$ و $C\hat{A}B=۵۰^\circ$ و نقطهٔ O مرکز دایره باشد، طول کمان AC برحسب واحد طول چقدر است؟



۱) ۲π ۲) ۴π
۳) ۶π ۴) ۸π

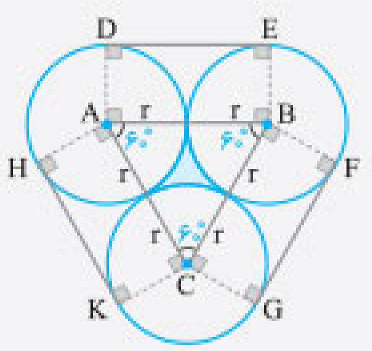
پاسخ گزینه ۳ با توجه به محاطی بودن زاویهٔ CAB، درمی‌یابیم که $\widehat{BC}=۱۰۰^\circ$ و از آن‌ها $\widehat{AC}=۸۰^\circ$ به‌دست می‌آید.



از طرفی مطابق فرض مسئله، $R=\frac{AB}{۲}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$ است، پس طول کمان AC عبارت است از:

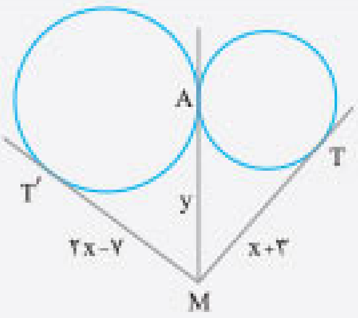
$$\ell=\frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha=\frac{\pi(۱۳/۵)}{۱۸۰^\circ}\times ۸۰^\circ=۶\pi$$

سه دایره به شعاع‌های برابر دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل، این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. طول این نخ، a برابر شعاع دایره و مساحت ناحیهٔ محدود به سه دایره، b برابر مجذور شعاع دایره است. دوتایی (a,b) کدام است؟



۱) $(۶+۲\pi,\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(۶+\pi,\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۲})$
۳) $(۶+۲\pi,\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۲})$ ۴) $(۶+\pi,\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$

تست: در شکل مقابل، دوتایی (x,y) کدام است؟



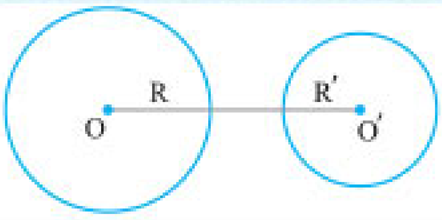
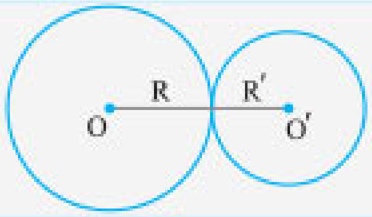
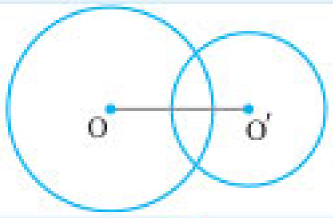
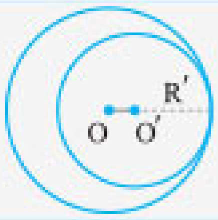
۱) $(۱۱,۱۲)$
۲) $(۱۰,۱۳)$
۳) $(۹,۱۱)$
۴) $(۱۰,۱۲)$

پاسخ گزینه ۲ با توجه به قضیهٔ دو مماس، واضح است که $MT=MA$ و $MT'=MA$. پس $MT=MT'$. داریم:

$$MT=MT' \Rightarrow x+۳=۲x-۷ \Rightarrow x=۱۰ \Rightarrow y=x+۳=۱۳$$

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایرهٔ $C(O\,,R)$ و $C'(O'\,,R')$ با توجه به فاصلهٔ $d=OO'$ (در اصطلاح طول خط‌المرکزین) و با فرض $R>R'$، نسبت به هم می‌توانند وضعیت‌های زیر را داشته باشند:

وضعیت	طرز تشخیص	شکل
متخارج (نقطهٔ اشتراکی ندارند)	$d>R+R'$	
مماس خارج (یک نقطهٔ اشتراک دارند)	$d=R+R'$	
متقاطع (دو نقطهٔ اشتراک دارند)	$R-R'<d<R+R'$	
مماس داخل (یک نقطهٔ اشتراک دارند)	$d=R-R'$	
متداخل (نقطهٔ اشتراکی ندارند)	$d<R-R'$	

(حالت دو دایرهٔ هم‌مرکز، حالت خاصی از دو دایرهٔ متداخل است که $d=۰$ است.)

تست: طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل، مساوی ۲ واحد و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها مساوی ۱۶π است. طول وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و بر خط‌المرکزین عمود است، کدام است؟

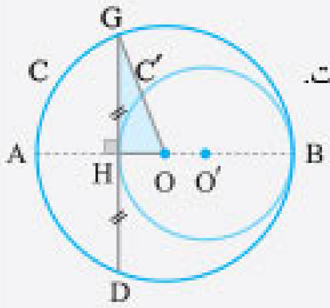
۱) $۴\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ گزینه ۱ اگر دو دایرهٔ مماس داخل را $C(O\,,R)$ و $C'(O'\,,R')$ با فرض $R>R'$ در نظر بگیریم، در این‌صورت مطابق فرض داده‌شده، داریم:

$$d=OO'=R-R'=۲$$

از طرفی طبق فرض سؤال، داریم:

$$S_C-S_{C'}=۱۶\pi \Rightarrow \pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi \xrightarrow{\div\pi} R^۲-R'^۲=۱۶ \Rightarrow \underbrace{(R-R')}_{۲}(R+R')=۱۶ \Rightarrow R+R'=۸$$



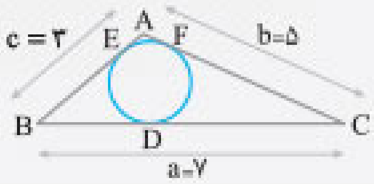
بنابراین دستگاه دو معادله دومجهولی $\begin{cases}R+R'=۸\\R-R'=۲\end{cases}$ به‌دست می‌آید، که پس از حل این دستگاه $R=۵$ و $R'=۳$ است.

پس وضعیت دو دایره به‌صورت مقابل می‌شود. وتر GD، وتر عمود بر خط‌المرکزین و مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. برای یافتن طول GD، ابتدا از مرکز O به نقطهٔ G وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHG به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$OG^۲=OH^۲+HG^۲ \Rightarrow ۵^۲=۱^۲+HG^۲ \Rightarrow HG=۲\sqrt{۶} \Rightarrow GD=۲HG=۲\times۲\sqrt{۶}=۴\sqrt{۶}$$

تست: در مثلثی به اضلاع ۳، ۵ و ۷ دایرهٔ محاطی داخلی ضلع بزرگ‌تر را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

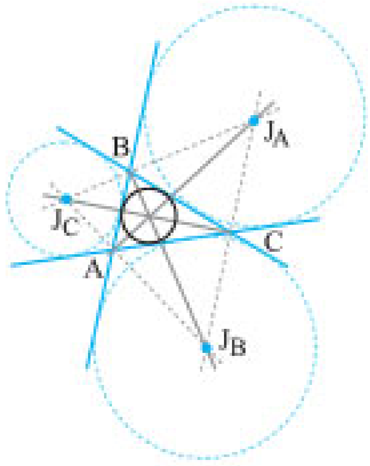
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$



پاسخ گزینه ۲ باتوجه به شکل، قطعه‌های BD و CD موردنظر است. ابتدا محیط مثلث را می‌یابیم. داریم:

$$۲P=۳+۵+۷=۱۵ \Rightarrow P=۷/۵ \Rightarrow \begin{cases} BD=P-b=۷/۵-۵=۲/۵ \\ CD=P-c=۷/۵-۳=۴/۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{۲/۵}{۴/۵}=\frac{۵}{۹}$$

دایره‌های محاطی خارجی مثلث



تعریف: دایره‌ای که بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی مثلث نامیده می‌شود. هر مثلث ۳ دایرهٔ محاطی خارجی دارد.

مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث، نقطهٔ همرسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی رأس سوم است.

نتیجه: در صفحهٔ هر مثلث همواره ۴ نقطه وجود دارد که از سه ضلع مثلث به یک فاصله‌اند.

(این چهار نقطه مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی مثلث‌اند.)

شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث

در مثلث ABC با مساحت S و محیط ۲P، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع $BC=a$ را با نماد r_a، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع $AC=b$ را با نماد r_b و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع $AB=c$ را با نماد r_c نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که:

مُهِم

$$r_a=\frac{S}{P-a} \quad , \quad r_b=\frac{S}{P-b} \quad , \quad r_c=\frac{S}{P-c}$$

تست: در مثلث قائم الزاویهٔ به ضلع‌های قائم ۵ و ۱۲ واحد، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر وتر و امتداد دو ضلع دیگر، چند واحد است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

پاسخ گزینه ۴ واضح است که اندازهٔ وتر برابر ۱۳ واحد می‌باشد و $۲P=۱۲+۵+۱۳=۳۰$ و در نتیجه $P=۱۵$ است. از طرفی $S=\frac{۵\times۱۲}{۲}=۳۰$،

پس اگر وتر این مثلث را a فرض کنیم، آن‌گاه: $r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۳۰}{۱۵-۱۳}=۱۵$

نتیجه: اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث باشد، آن‌گاه:

الف) $\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$

ب) $\frac{۱}{r}=\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$ (h_a، h_b و h_c اندازهٔ سه ارتفاع مثلث هستند)

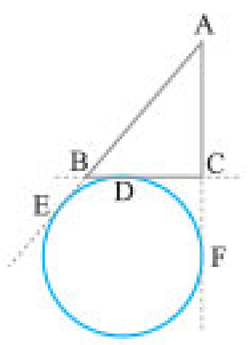
پ) $S^۲=r\times r_a\times r_b\times r_c$ (S مساحت مثلث است)

ت) $P^۲=r_a\times r_b+r_b\times r_c+r_c\times r_a$ (P نصف محیط مثلث است)

- برای اثبات «الف» داریم: $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{۳P-(a+b+c)}{S}=\frac{۳P-۲P}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$

(به همین ترتیب سایر موارد را می‌توان اثبات کرد.)

محاسبهٔ طول قطعه‌هایی که دایرهٔ محاطی خارجی مثلث روی ضلع‌های مثلث پدید می‌آورد.



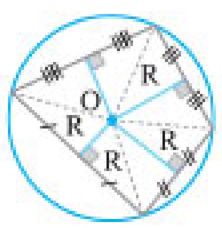
در مثلث ABC، به اضلاع $BC=a$، $AC=b$ و $AB=c$ و محیط ۲P داریم:

$$\begin{cases} AE=AF=P \\ BD=BE=P-c \\ CD=CF=P-b \end{cases}$$

برای اثبات داریم:

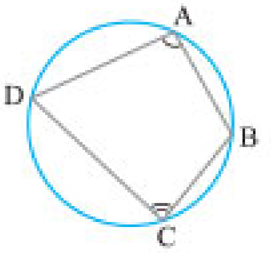
$$\underbrace{AB+\underbrace{BD}_{BE}}_{AE}+\underbrace{AC+\underbrace{CD}_{CF}}_{AF}=۲P \Rightarrow AE+\underbrace{AF}_{AE}=۲P \Rightarrow ۲AE=۲P \Rightarrow AE=P$$

چهارضلعی محاطی (محاط در دایره)



تعریف: چهارضلعی که هر چهار رأس آن روی محیط یک دایره است (دایرهٔ محیطی)، پس مرکز این دایره از هر چهار رأس به یک فاصله است؛ بنابراین نقطهٔ همرسی عمود منصف‌های هر چهار ضلع است.

تشخیص چهارضلعی محاطی



قضیه: یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر هر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

بنابراین در شکل داریم: $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Leftrightarrow$ چهارضلعی ABCD محاطی است.

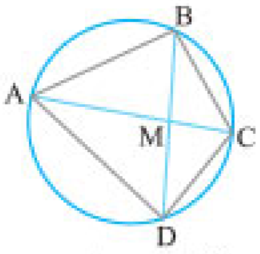
توجه: بین چهارضلعی‌های معروف، **مربع**، **مستطیل** و **ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین**، همواره محاطی‌اند.

تست: در هر یک از موارد زیر، زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی مفروض داده‌شده است. کدام یک می‌تواند چهارضلعی محاطی باشد؟

۱) $۷۵^\circ, ۱۰۸^\circ, ۱۰۵^\circ, ۷۲^\circ$ ۲) $۱۲۶^\circ, ۵۲^\circ, ۴۴^\circ, ۱۳۸^\circ$

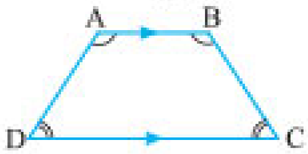
۳) $۸۳^\circ, ۱۲۴^\circ, ۱۱۲^\circ, ۵۶^\circ$ ۴) همهٔ موارد

پاسخ گزینه ۱ محاطی است، زیرا $۱۸۰^\circ=۷۲^\circ+۱۰۸^\circ$؛ پس این دو زاویه می‌توانند دو زاویهٔ مقابل در این چهارضلعی محاطی باشند، (توجه کنید که دو زاویهٔ دیگر نیز مکمل‌اند.) گزینهٔ «۲»: محاطی نیست، زیرا هیچ دو زاویه‌ای مکمل نیستند. گزینهٔ «۳»: چنین چهارضلعی وجود ندارد زیرا مجموع زاویه‌های داخلی آن بزرگ‌تر از ۳۶۰° است.



نکته: ۱ یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب قطعه‌های یک قطر آن با حاصل‌ضرب قطعه‌های قطر دیگر آن برابر باشد.

$MA\times MC=MB\times MD \Leftrightarrow$ چهارضلعی ABCD محاطی است.

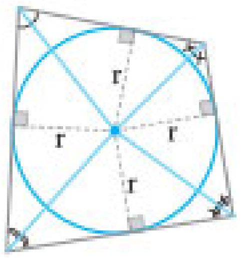


۲ یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

زیرا اگر ذوزنقه محاطی باشد، آن‌گاه $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، از طرفی می‌دانیم در هر ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق، مکمل‌اند.

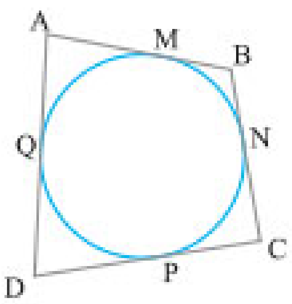
پس $\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{C}=\hat{D}$؛ بنابراین ذوزنقهٔ محاطی، متساوی‌الساقین است.

چهارضلعی محیطی (محیط بر دایره)



تعریف: چهارضلعی‌ای که هر چهار ضلع آن بر یک دایره مماس‌اند (دایرهٔ محاطی). پس مرکز این دایره از هر چهار ضلع به یک فاصله است و بنابراین نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی هر چهار زاویه است.

تشخیص چهارضلعی محیطی



قضیه: یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اندازهٔ دوضلع مقابل برابر با مجموع اندازهٔ دو ضلع دیگر باشد.

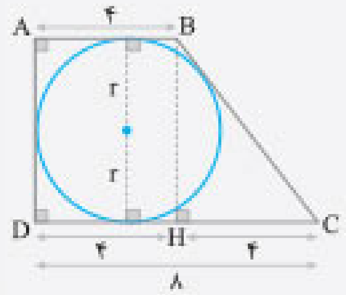
بنابراین، در شکل روبه‌رو داریم:

$AB+DC=AD+BC \Leftrightarrow$ چهارضلعی ABCD محیطی است.

توجه: بین چهارضلعی‌های معروف، **مربع**، **لوزی** و **کایت** همواره محیطی‌اند.

تست: در ذوزنقهٔ محیطی ABCD، اگر $AB \parallel CD$، $\hat{A}=۹۰^\circ$، $AB=۴$ و $CD=۸$ باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محاطی آن چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$



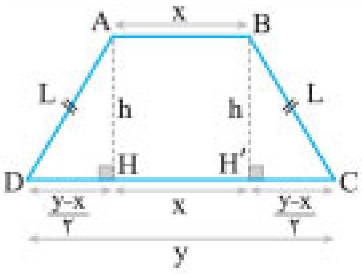
پاسخ گزینه ۳ باتوجه به محیطی‌بودن ذوزنقه داریم:

$$AB+CD=AD+BC \Rightarrow ۴+۸=۲r+BC \Rightarrow ۲r+BC=۱۲ \Rightarrow BC=۱۲-۲r$$

اگر ارتفاع وارد بر قاعده را از رأس B رسم کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BH^۲+CH^۲=BC^۲ \Rightarrow (۲r)^۲+۴^۲=(۱۲-۲r)^۲ \Rightarrow ۴r^۲+۱۶=۱۴۴-۴۸r+۴r^۲$$

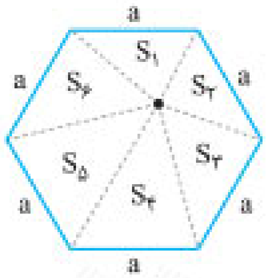
$$\Rightarrow ۴۸r=۱۲۸ \Rightarrow r=\frac{۱۲۸}{۴۸}=\frac{۸}{۳}$$



نکته: اگر یک ذوزنقه، هم محیطی و هم محاطی باشد، آن‌گاه مساحت آن برابر است با:

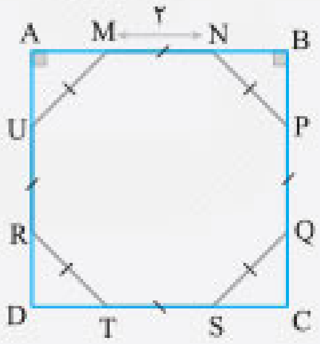
«میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن × میانگین هندسی دو قاعده»

$$S_{ABCD}=\frac{(x+y)\times\sqrt{xy}}{۲}$$



نتیجه: اگر از نقطه‌ای دلخواه درون یک شش‌ضلعی منتظم، به شش رأس آن وصل کنیم، آن‌گاه مجموع مساحت ناحیه‌های فرد با مجموع مساحت ناحیه‌های زوج برابر است.

$$\boxed{S_۱+S_۳+S_۵=S_۲+S_۴+S_۶}$$



تست: **هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ در یک مربع، مطابق شکل محاط شده است. مساحت این هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟**

۱) $۴(۲+\sqrt{۲})$
۲) $۸(۱+\sqrt{۲})$
۳) $۶(۲+\sqrt{۲})$
۴) $۳(۴+۲\sqrt{۲})$

پاسخ گزینه ۲ می‌دانیم هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۸-۲}{۸}\times۱۸۰^\circ=۱۳۵^\circ$

پس زاویه‌های حادهٔ مثلث‌های چهارگوشه برابر ۴۵° است؛ بنابراین چهار مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین و با هم مساوی‌اند. با توجه به اینکه $MN=NP=۲$، پس مطابق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BNP، $BN=BP=\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید.

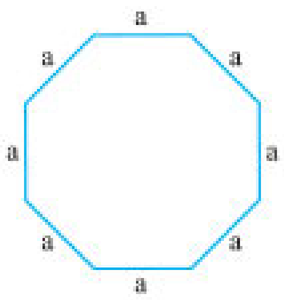
بنابراین ضلع مربع برابر است با: $\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}=۲+۲\sqrt{۲}$

اکنون برای یافتن مساحت هشت‌ضلعی منتظم، کافی است از مساحت مربع، مساحت چهار مثلث کناری را کم کنیم. داریم:

$$S_{\text{۸ضلعی}}=S_{ABCD}-۴S_{\overset{\triangle}{BNP}}=(۲+۲\sqrt{۲})^۲-۴\times\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲}=۸+۸\sqrt{۲}=۸(۱+\sqrt{۲})$$

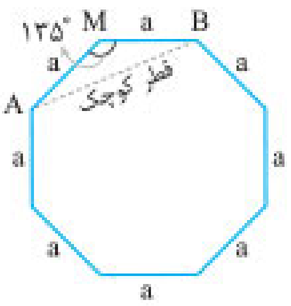
یک گام فراتر: ۱ مساحت هشت‌ضلعی منتظمی به ضلع a، برابر است با:

$$\boxed{S_{\text{۸ضلعی}}=۲a^۲(۱+\sqrt{۲})}$$



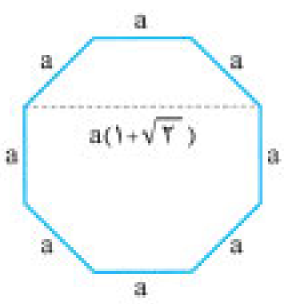
۲ در یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع a، توان دوم اندازهٔ کوچک‌ترین قطر، برابر است با: $\boxed{a^۲(۲+\sqrt{۲})}$

(برای اثبات کافی است در مثلث متساوی‌الساقین MAB، قضیهٔ کسینوس‌ها را بنویسید.)



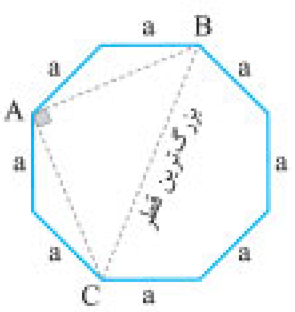
۳ در یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع a، اندازهٔ قطر متوسط، برابر است با: $\boxed{a(۱+\sqrt{۲})}$

(برای اثبات کافی است در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، هر دو ارتفاع را رسم کنید.)

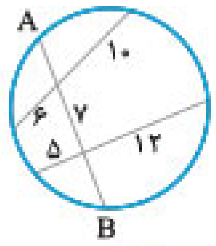


۴ در یک هشت‌ضلعی منتظم، همواره اندازهٔ بزرگ‌ترین قطر، $\sqrt{۲}$ برابر اندازهٔ کوچک‌ترین قطر آن است. $\boxed{\sqrt{۲}a^۲(۲+\sqrt{۲})}$

(برای اثبات کافی است نشان دهید مثلث ABC، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.)

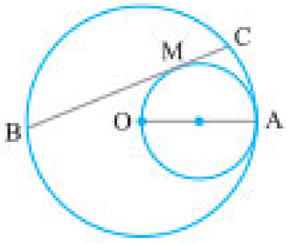


۷۲۴. در شکل مقابل، طول وتر AB کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)



۱) ۱۶ ۲) ۱۷
۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۷۲۵. در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

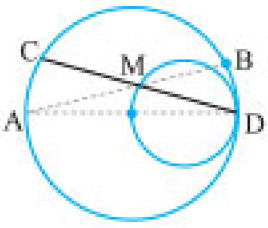


۱) MO^2 ۲) MA^2
۳) OA^2 ۴) $MA \cdot MO$

۷۲۶. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطهٔ A مماس درونی هستند. وتر BC از دایرهٔ بزرگ، موازی خط‌المرکزین و بر دایره کوچک در نقطهٔ P مماس است. اندازه $PB \times PC$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

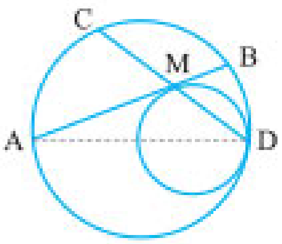
۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۷۲۷. در شکل مقابل، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازهٔ کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)



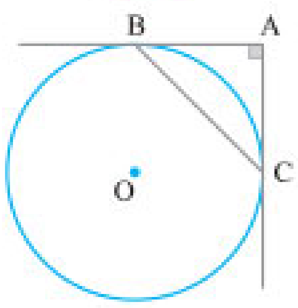
۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۶ ۴) ۱۲

۷۲۸. در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ داخل، در نقطهٔ M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)



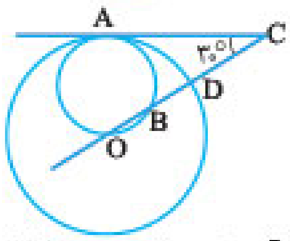
۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۷۲۹. مطابق شکل مقابل، از نقطهٔ A، دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O, 2\sqrt{2})$ رسم‌شده است. اندازهٔ وتر BC کدام است؟



۱) ۵ ۲) $4\sqrt{2}$
۳) ۶ ۴) $6\sqrt{2}$

۷۳۰. در شکل مقابل، پاره‌خط AC و دایرهٔ کوچک، در نقطهٔ A، بر دایرهٔ بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایرهٔ کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)



۱) ۴ ۲) ۳
۳) $\sqrt{6}$ ۴) ۲

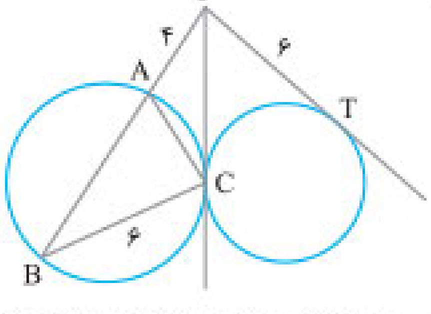
۷۳۱. از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم‌شده است. اگر فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

۷۳۲. دایرهٔ C به شعاع ۲ از نقطهٔ A با زاویهٔ $60°$ رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و T نقطهٔ تماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت مثلث AOT کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $8\sqrt{3}$

۷۳۳. در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ C مماس برون‌اند، همچنین P روی مماس مشترک داخلی دو دایره واقع بوده و PT بر دایره مماس است. اگر $AP = 4$، $PT = 6$ و $BC = 6$ باشد، طول پاره‌خط AC کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

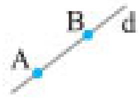
۷۳۴. در دو دایرهٔ هم‌مرکز، وتر $AB = 5$ از دایرهٔ بزرگ‌تر، در نقطهٔ C بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. وتر AB را از طرف B به اندازهٔ دلخواه تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ D مماس DT را بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. حاصل $DC^2 - DT^2$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۴

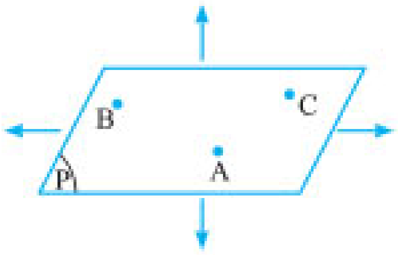
نقطه، خط و صفحه

نقطه ،خط و صفحه

تا این‌جا آنچه از هندسه خواندیم مربوط به شکل‌های درون صفحه بوده است. در این درس نقطه، خط و صفحه را در فضا بررسی می‌کنیم. در حقیقت در این درس با شکل‌هایی سر و کار داریم که همهٔ اجزای آن‌ها در یک صفحه قرار ندارند.
مفاهیم نقطه، خط و صفحه از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آن‌ها به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:



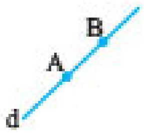
خط AB یا d



صفحهٔ ABC یا P

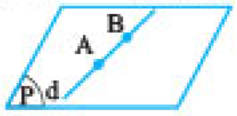
دقت کنید که خط راست از هر دو طرف نامحدود است و صفحه نیز از هر چهار طرف نامحدود است و ضخامتی ندارد. در واقع ما قسمتی از خط و قسمتی از صفحه را نمایش می‌دهیم.

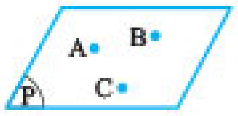
نقطه ،خط، صفحه (مفاهیم اولیه در هندسه)



از هر دو نقطهٔ متمایز در فضا (صفحه) یک و فقط یک خط می‌گذرد.

اگر دو نقطهٔ متمایز از خطی، در یک صفحه باشد، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار دارد.

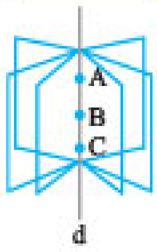




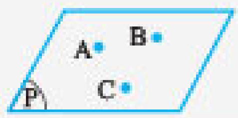
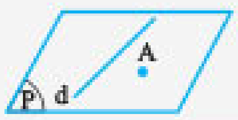
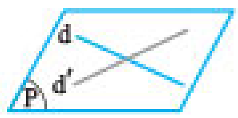
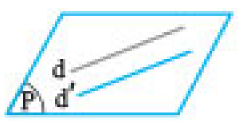
از هر سه نقطهٔ متمایز در فضا که روی یک خط نباشند، یک و فقط یک صفحه می‌گذرد.

- اگر سه نقطهٔ متمایز روی یک امتداد (خط) باشند، بی‌شمار صفحه از آن‌ها می‌گذرد.

نتیجه: از هر خط در فضا، بی‌شمار صفحه می‌گذرد.



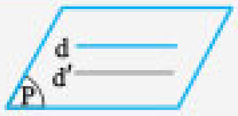
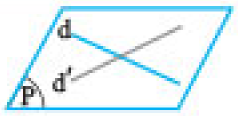
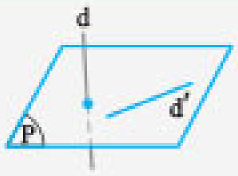
نمایش صفحه در فضا

الف) از سه نقطهٔ متمایز که روی یک راستا نباشند، فقط یک صفحه می‌گذرد. 	**ب)** از یک خط و یک نقطهٔ خارج آن، فقط یک صفحه می‌گذرد. 
پ) از دو خط متقاطع، فقط یک صفحه می‌گذرد. 	**ت)** از دو خط موازی غیرمنطبق فقط یک صفحه می‌گذرد. 

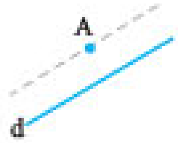
وضعیت نسبی دو خط در صفحه

الف) دوخط متقاطع‌اند. (یک نقطهٔ اشتراک دارند.)
ب) دوخط موازی‌اند (نقطهٔ اشتراک ندارند.)
پ) دوخط منطبق‌اند (بی‌شمار نقطهٔ اشتراک دارند.)، که حالت خاصی از توازی است.

وضعیت نسبی دوخط در فضا

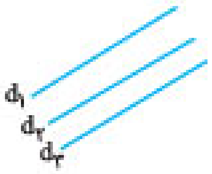
الف) موازی: دو خط نقطهٔ اشتراک ندارند و صفحه‌ای شامل هر دو وجود دارد. (انطباق دو خط، حالت خاص توازی است.)	
ب) متقاطع: دوخط یک نقطهٔ اشتراک دارند. (دو خط در یک صفحه واقع‌اند.)	
پ) متنافر: دوخط نقطهٔ اشتراک ندارند و صفحه‌ای شامل هر دو وجود ندارد.	

تذکر: ① از هر نقطه خارج یک خط (در فضا یا در صفحه)، تنها یک خط به موازات آن خط رسم می‌شود. (اصل توازی اقلیدس)



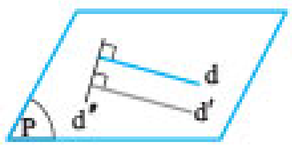
② دو خط موازی با یک خط (در صفحه یا در فضا)، با هم موازی‌اند. (خاصیت تعدی توازی)

$$(d_1 \parallel d_2 \wedge d_2 \parallel d_3) \Rightarrow d_1 \parallel d_3$$

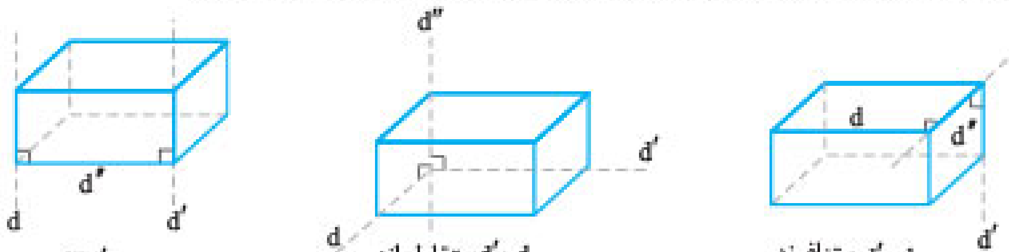


③ دو خط عمود بر یک خط (در صفحه)، موازی‌اند.

$$(d \perp d'' \wedge d' \perp d'') \xrightarrow[\text{در یک صفحه‌اند}]{\text{هر سه خط}} d \parallel d''$$

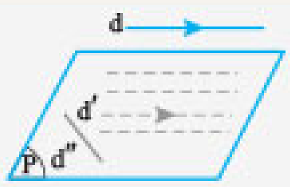
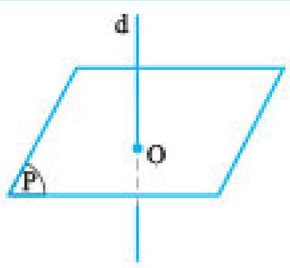
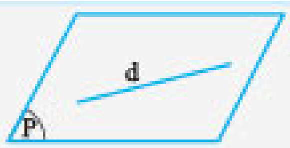


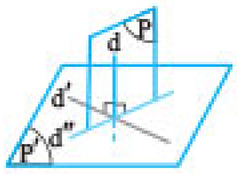
④ دو خط عمود بر یک خط (در فضا)، می‌توانند با هم هر حالتی داشته باشند. $(d \perp d'' \wedge d' \perp d'')$



$d \parallel d'$ d و d' متقاطع‌اند d و d' متنافرند

وضعیت نسبی خط و صفحه

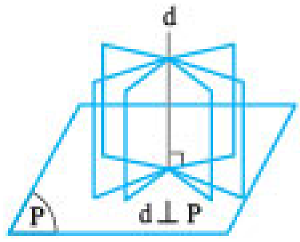
الف) موازی: خط و صفحه، با هم اشتراکی ندارند. • اگر خطی با یکی از خط‌های صفحه‌ای موازی باشد، آن‌گاه با آن صفحه موازی است: اما اگر خطی با یک صفحه موازی باشد، با تمام خط‌های آن صفحه موازی <u>نیست</u>. • اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با بی‌شمار خط از آن صفحه موازی است: ولی با هر خط از آن صفحه، لزوماً موازی نیست.	 $d \cap P = \varnothing \Leftrightarrow d \parallel P$ $(d \parallel d' \wedge d' \subset P) \Rightarrow d \parallel P$ $(\underbrace{d \parallel P \wedge d'' \subset P}_{\text{d و d'' موازی یا متنافرند}}) \Rightarrow ?$
ب) متقاطع: خط و صفحه یک نقطهٔ مشترک دارند.	 $d \cap P \neq \varnothing$ یا $d \cap P = \{O\}$
پ) منطبق: خط و صفحه بی‌شمار نقطهٔ اشتراک دارند. (خط واقع بر صفحه است.)	 $d \subset P \Leftrightarrow d \cap P = d$



● دو صفحه بر هم عمودند، هرگاه یک خط از صفحهٔ اول بر دو خط متقاطع از صفحهٔ دیگر عمود باشد.

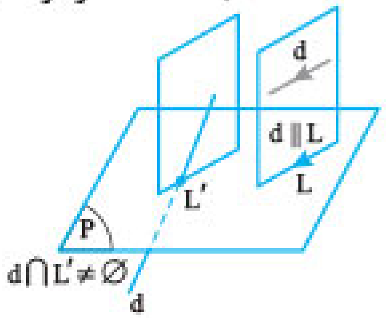
$$(d \subset P \wedge d \perp d' \wedge d \perp d'') \xrightarrow[d' \cap d'' \neq \varnothing]{d', d'' \subset P'} P \perp P'$$

نتیجه: ۱ اگر خط d بر صفحهٔ P عمود باشد، بی‌شمار صفحهٔ گذرا از خط d و عمود بر صفحهٔ P وجود دارد. (خط d فصل مشترک تمام آن صفحات است.)

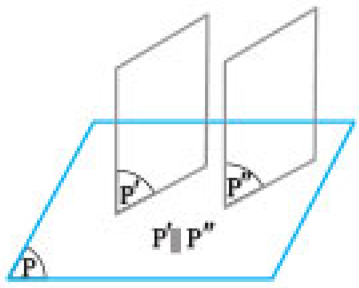


۲ اگر خط d با صفحهٔ P متقاطع و غیر عمود یا موازی باشد، فقط یک صفحهٔ گذرا از خط d و عمود بر صفحهٔ P وجود دارد.

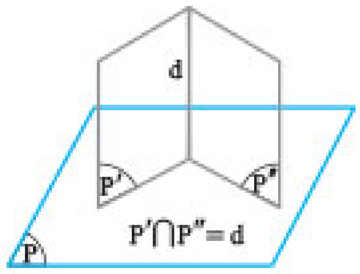
● در حالتی که $d \parallel P$ است، خط d با خط L (فصل مشترک صفحهٔ P با صفحهٔ گذرا از d و عمود بر P) موازی است.



۳ دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه، با هم موازی یا متقاطع‌اند.



$(P' \perp P \wedge P'' \perp P)$



$(P' \perp P \wedge P'' \perp P)$

۴ اگر دو صفحهٔ متقاطع بر صفحهٔ سومی عمود باشند، فصل مشترک دو صفحهٔ متقاطع نیز بر صفحهٔ سوم عمود است.

۵ اگر صفحه‌ای، بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

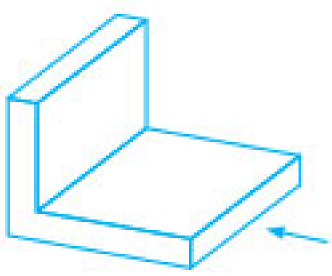
تفکر تجسمی

در تفکر تجسمی از عبارت‌ها و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع موردنظر فکر کنیم.

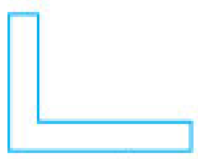
در این قسمت می‌خواهیم از تصاویر برای توصیف یک حجم هندسی استفاده کنیم.

تصویر سه‌نما: به تصاویری که از سه نمای روبه‌رو، چپ و بالای یک جسم رسم می‌شود، تصاویر سه نمای آن جسم می‌گویند.

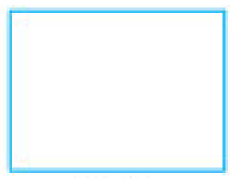
برای نمونه: به مثال زیر توجه کنید:



نمای روبه‌رو

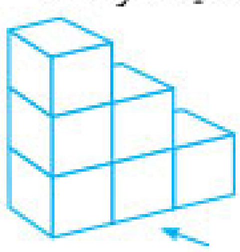


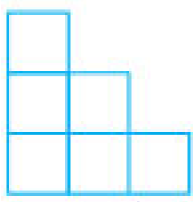
نمای چپ



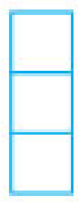
نمای بالا

تذکر: علامت ↖ نشان‌دهندهٔ نمای روبه‌رو است که ناظر ابتدا آن‌جا ایستاده است و جهت قلش نشان‌دهندهٔ جهت دید ناظر است.

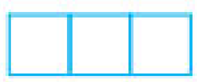




نمای روبه‌رو



نمای چپ



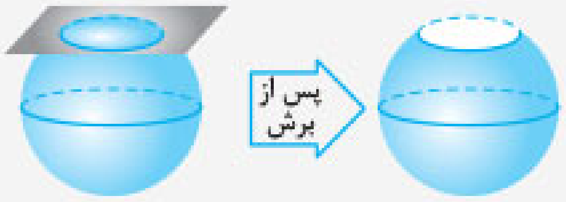
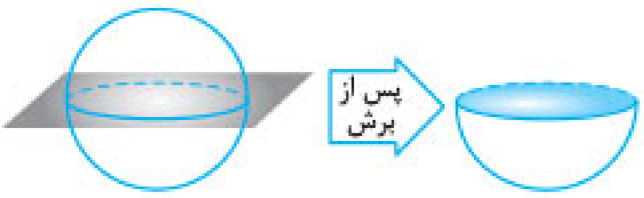
نمای بالا

برش

اگر اجسام و یا شکل‌های هندسی را برش بزنیم، شکل‌های مختلفی پدید می‌آیند.

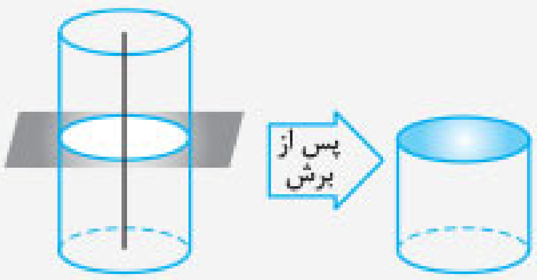
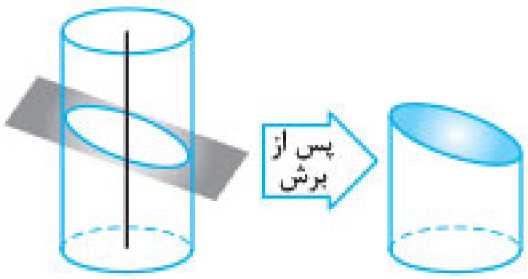
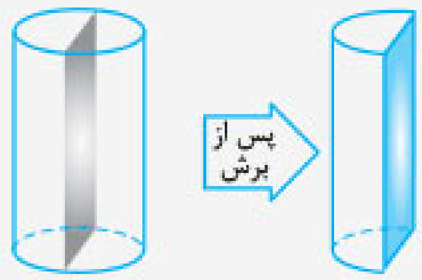
تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن جسم هندسی نامیده می‌شود.

برش کُره و نیم‌کره

• سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره یا نیم‌کره، همواره یک دایره است.	
توجه: اگر صفحهٔ قاطع از مرکز کره بگذرد، آن‌گاه بزرگ‌ترین سطح مقطع (دایره‌ای که دارای بیشترین مساحت است.) پدید می‌آید و دایرهٔ بزرگ (عظیمه) نامیده می‌شود.	

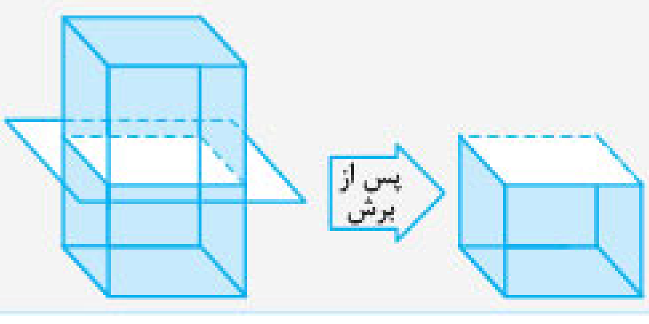
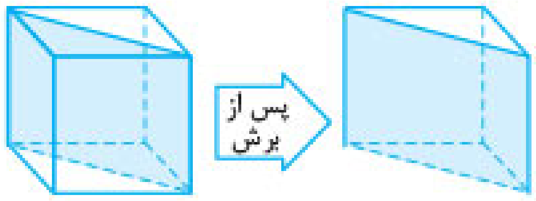
برش استوانه

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک استوانه، سه حالت زیر را پدید می‌آورد:

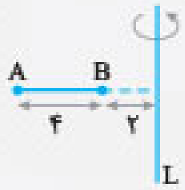
• اگر صفحهٔ قاطع، موازی با قاعدهٔ استوانه (عمود بر محور آن) باشد، سطح مقطع حاصل، یک دایره است.	
• اگر صفحهٔ قاطع، نسبت به قاعدهٔ استوانه مایل باشد، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.	
• اگر صفحهٔ قاطع، عمود بر قاعدهٔ استوانه (موازی با محور آن) باشد، سطح مقطع حاصل، یک مستطیل است.	

برش مکعب‌مستطیل و مکعب

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل (مکعب)، حالت‌های زیر را پدید می‌آورد:

• اگر صفحهٔ قاطع، موازی با یکی از وجه‌های مکعب مستطیل (مکعب) باشد، سطح مقطع حاصل یک مستطیل (مربع) است. **نکته:** ابعاد این مستطیل (مربع)، با ابعاد وجه موازی با آن یکسان است.	
• اگر صفحهٔ قاطع منطبق بر صفحهٔ قطری مکعب مستطیل (مکعب) باشد، سطح مقطع حاصل یک مستطیل است. **نکته:** طول مستطیل حاصل، با قطر وجه و عرض آن با یال منطبق بر آن برابر است.	

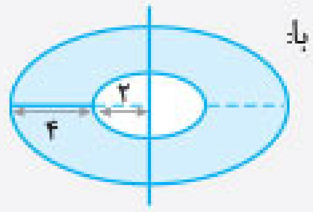
تست: **پاره‌خط AB به طول ۴ واحد، مطابق شکل، حول خط L دوران می‌کند. مساحت شکل حاصل، چند واحد مربع است؟**



۱) 16π
۲) 18π
۳) 32π
۴) 36π

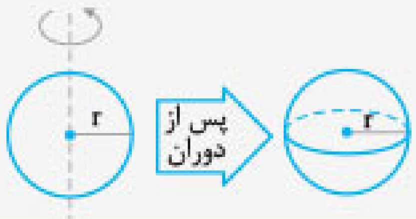
پاسخ گزینه۳ مطابق شکل مقابل، مساحت بین دو دایرهٔ هم مرکز، به شعاع‌های ۶ و ۲ موردنظر است که برابر است با:

$$\pi\times 6^2-\pi\times 2^2=32\pi$$



شکل حاصل از دوران، یک کُره است.

- اگر یک دایره را حول یکی از قطرهای آن دوران دهیم، یک کُره هم‌مرکز با دایره تشکیل می‌شود، که شعاع آن با شعاع دایره برابر است.



- اگر یک نیم‌دایره را حول قطر آن دوران دهیم، یک کُرهٔ هم‌مرکز با نیم‌دایره تشکیل می‌شود، که شعاع آن با شعاع نیم‌دایره برابر است.

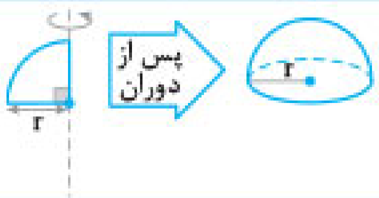
یادآوری: ۱ مساحت سطح کره‌ای به شعاع r برابر با $4\pi r^2$ است.

۲ حجم کره‌ای به شعاع r، برابر با $\frac{4}{3}\pi r^3$ است.

شکل حاصل از دوران، یک نیم‌کُره است.

- اگر یک نیم‌دایره را حول شعاع عمود بر قطر آن دوران دهیم، یک نیم‌کُرهٔ هم مرکز با نیم‌دایره تشکیل می‌شود، که شعاع آن با شعاع نیم‌دایره برابر است.

- اگر یک ربع دایره را، حول یکی از دو شعاع عمود بر هم دوران دهیم، یک نیم‌کُرهٔ هم‌مرکز با ربع دایره تشکیل می‌شود، که شعاع آن با شعاع ربع دایره برابر است.



یادآوری: ۱ مساحت سطح نیم‌کُره‌ای به شعاع r برابر با $2\pi r^2$ است.

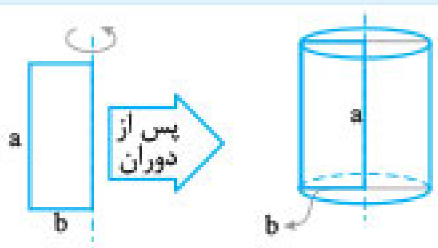
۲ مساحت کل نیم‌کُره‌ای به شعاع r (مساحت سطح جانبی نیم‌کره + مساحت قاعدهٔ دایره‌ای شکل آن) برابر با $3\pi r^2$ است.

۳ حجم نیم‌کره‌ای به شعاع r، برابر با $\frac{2}{3}\pi r^3$ است.

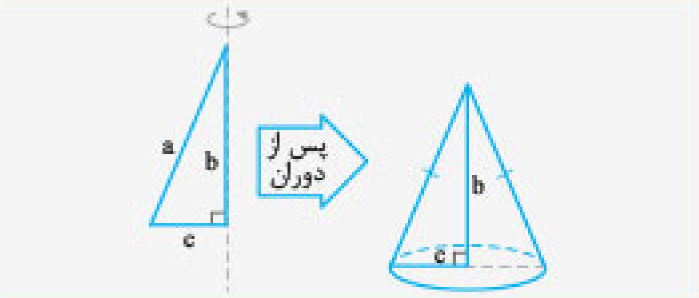
شکل حاصل از دوران، یک استوانه است.

- اگر دو خط با هم موازی باشند و یکی حول دیگری دوران کند، یک استوانه (سطح استوانه‌ای) حاصل می‌شود.

- اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، یک استوانه حاصل می‌شود.



شکل حاصل از دوران، مخروط است.

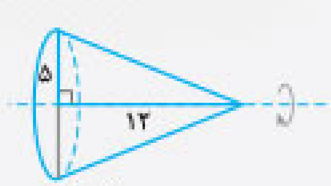
● اگر دو پاره‌خط، متقاطع و غیر عمود بر هم باشند و یکی حول دیگری دوران کند، دو مخروط (شبیه ساعت شنی)، که در رأس مشترک‌اند، حاصل می‌شود.	
● اگر یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن دوران کند، یک مخروط حاصل می‌شود، که ارتفاع مخروط با ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین و شعاع قاعدهٔ مخروط، با نصف اندازهٔ قاعدهٔ مثلث برابر است.	
● اگر یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یک ضلع زاویهٔ قائمه دوران کند، یک مخروط حاصل می‌شود، که ارتفاع مخروط با اندازهٔ همان ضلع زاویهٔ قائمه و شعاع قاعدهٔ مخروط با اندازهٔ ضلع دیگر زاویهٔ قائمه برابر است.	
● اگر یک مثلث قائم‌الزاویه، حول وتر دوران کند، دو مخروط هم‌قاعده حاصل می‌شود، که مجموع ارتفاع‌های هر دو مخروط، همان وتر مثلث و شعاع قاعدهٔ هر دو، با اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر مثلث برابر است.	

یادآوری: حجم یک مخروط با ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}\cdot h$

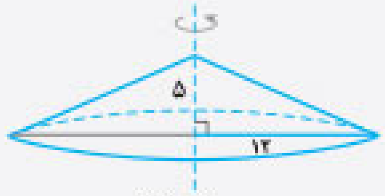
تست: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۵ و ۱۲ واحد را حول هر دو ضلع قائمه، دوران داده‌ایم. نسبت حجم دو جسم پدیدآمده کدام است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۱/۸

پاسخ (گزینه ۱) واضح است که دو مخروط حاصل می‌شود. اولی به ارتفاع ۱۲ و شعاع قاعدهٔ ۵ و دومی به ارتفاع ۵ و شعاع قاعدهٔ ۱۲ است؛ پس:



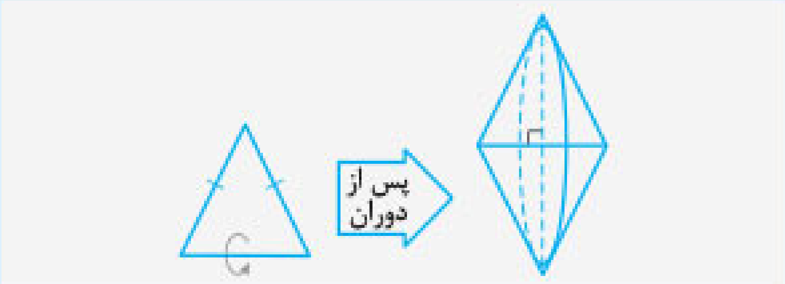
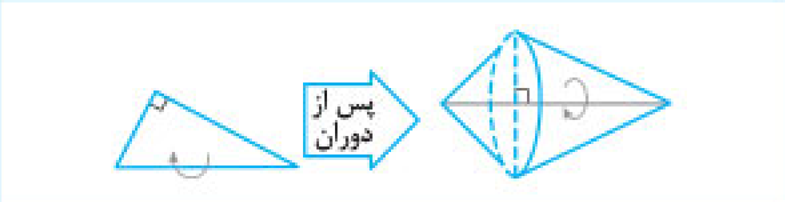
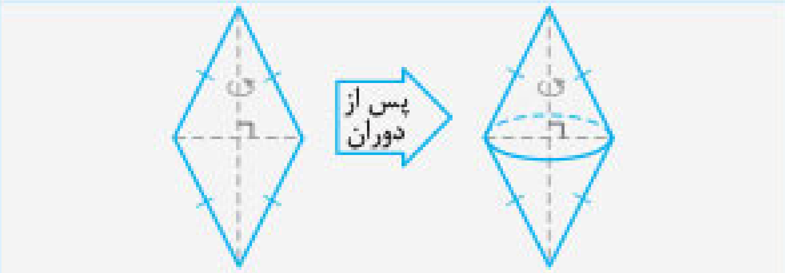
مخروط ۱



مخروط ۲

$$\frac{\text{حجم مخروط ۲}}{\text{حجم مخروط ۱}}=\frac{\frac{۱}{۳}\pi(۱۲)^{۲}\times ۵}{\frac{۱}{۳}\pi(۵)^{۲}\times ۱۲}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

شکل حاصل از دوران، دو مخروط هم‌قاعده است.

● اگر یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ خود دوران کند، دو مخروط به هم چسبیده (هم‌قاعده) با ارتفاع‌های یکسان حاصل می‌شود.	
● اگر یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر خود دوران کند، دو مخروط به هم چسبیده (هم‌قاعده) با ارتفاع‌های یکسان حاصل می‌شود.	
● اگر یک لوزی حول یکی از قطرهایش دوران کند، دو مخروط به هم چسبیده (هم‌قاعده) با ارتفاع‌های یکسان حاصل می‌شود.	

تست: اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۱) 4π ۲) 8π ۳) 3π ۴) 6π

پاسخ گزینه ۲ مطابق شکل، دو مخروط یکسان به هم چسبیده (هم‌قاعده) به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۳ تشکیل می‌شود: پس حجم شکل حاصل عبارت است از:

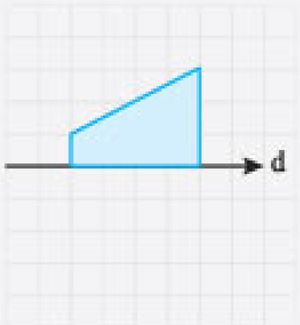
$$2\times\frac{1}{3}\pi(2)^2\times 3=8\pi$$

شکل حاصل از دوران، یک مخروط ناقص است.

• اگر یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم خود دوران کند، یک مخروط ناقص حاصل می‌شود.	
• اگر یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول خط واصل وسط‌های دو قاعدهٔ خود، دوران کند، یک مخروط ناقص حاصل می‌شود.	

نکته: حجم مخروط ناقص با ارتفاع h و شعاع قاعده‌های کوچک و بزرگ به‌ترتیب r_1 و r_2، برابر است با: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot(r_1^2+r_1\cdot r_2+r_2^2)\cdot h$

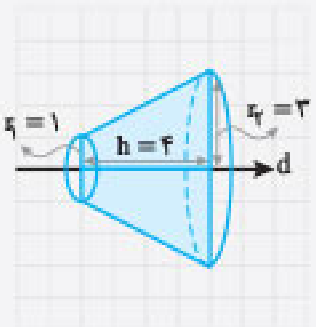
تست: ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ مقابل را حول محور d دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند برابر عدد $\frac{\pi}{3}$ است؟



۱) ۱۳
۲) ۲۶
۳) ۳۹
۴) ۵۲

پاسخ گزینه ۴

شکل حاصل یک مخروط ناقص است، که طبق صفحهٔ شطرنجی داده‌شده، ارتفاع آن $h=4$، شعاع قاعدهٔ کوچک $r_1=1$ و شعاع قاعدهٔ بزرگ آن $r_2=3$ می‌باشد؛ پس حجم شکل حاصل، طبق فرمول گفته‌شده، برابر است با:



$$V=\frac{1}{3}\pi(1^2+1\times3+3^2)\times4=\frac{\pi}{3}\times52$$

$$|A|=\begin{vmatrix}|A| & 3\\ 4 & |A|-3\end{vmatrix}\Rightarrow |A|=|A|(|A|-3)-4\times 3$$

$$\Rightarrow |A|=|A|^2-3|A|-12\Rightarrow |A|^2-4|A|-12=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}}(|A|-6)(|A|+2)=0\Rightarrow |A|=6, |A|=-2$$

۶۵. گزینه ۱

$$B=A\cdot C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ a & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & a\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 3a\\ 3a & a^2+5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}14 & 3a\\ 3a & a^2+5\end{vmatrix}=14(a^2+5)-3a\times 3a=5a^2+70$$

از آن‌جایی که a^2 عددی همواره نامنفی است؛ حاصل دترمینان ماتریس B همواره مثبت می‌باشد.

۶۶. گزینه ۱ ابتدا ماتریس A را با به‌دست آوردن درایه‌هایش می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}1\times 1-3\times 1 & 1\times 2-3\times 1\\ 2\times 1-3\times 2 & 2\times 2-3\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

سپس دترمینان ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=(-2)(-2)-(-1)(-4)=4-4=0$$

۶۷. گزینه ۳ عدد k را به تمام عضوهای ماتریس A اضافه می‌کنیم تا به ماتریس $B=\begin{bmatrix}2+k & 3+k\\ 4+k & 5+k\end{bmatrix}$ برسیم؛ سپس دترمینان ماتریس‌های A و B را پیدا کرده و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2+k & 3+k\\ 4+k & 5+k\end{vmatrix}=(2+k)(5+k)-(3+k)(4+k)$$

$$=k^2+7k+10-(k^2+7k+12)=-2$$

بنابراین مقادیر دو دترمینان با هم برابرند.

۶۸. گزینه ۴

$$|A|=(\log_6 3)^2-(\log_6 2)^2=\underbrace{(\log_6 3+\log_6 2)}_{\log_6 6}\underbrace{(\log_6 3-\log_6 2)}_{\log_6 \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow |A|=\log_6 \frac{3}{2}\Rightarrow 6^{|A|}=\frac{3}{2}$$

حال به محاسبهٔ دترمینان ماتریس B می‌پردازیم:

$$|B|=6^{|A|}\times 36^{|A|}-3^{|A|}\times 2^{|A|}=6^{|A|}\times 6^{2|A|}-6^{|A|}=6^{3|A|}-6^{|A|}$$

$$=(6^{|A|})^3-6^{|A|}=(\frac{3}{2})^3-\frac{3}{2}=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$$

۶۹. گزینه ۳

$$a=(\log 25)^2-(\log 4)^2=(\log 5^2)^2-(\log 2^2)^2$$

$$=(2\log 5)^2-(2\log 2)^2=4[(\log 5)^2-(\log 2)^2]$$

$$=4(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)=4(\log\frac{5}{2})(\underbrace{\log 10}_{1})$$

$$\Rightarrow a=4\log\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{a}{4}=\log\frac{5}{2}\Rightarrow 10^{\frac{a}{4}}=\frac{5}{2}$$

حال به محاسبهٔ دترمینان موردنظر می‌پردازیم:

$$|\frac{1}{3}A_{2\times 2}|=(\frac{1}{3})^2|A|=\frac{1}{9}(10^{\frac{a}{4}}\times 10^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{a}{2}}\times 5^{\frac{a}{2}})$$

$$=\frac{1}{9}[(10^{\frac{a}{4}})^3-(10^{\frac{a}{4}})^2]=\frac{1}{9}[(\frac{5}{2})^3-(\frac{5}{2})^2]$$

$$=\frac{1}{9}(\frac{125}{8}-\frac{25}{4})=\frac{25}{24}$$

۷۰. گزینه ۴ به کمک قضیهٔ کیلی ـ همیلتون، چون $a+d=1+(-3)=-2$ و $|A|=-13$؛ پس داریم:

$$A^2-(-2)A+(-13)I=\overline{O}\Rightarrow A^2+2A=13I$$

مطلوب مسئله عبارت است از:

$$(A-3I)(A+5I)=\underbrace{A^2+2A}_{13I}-15I=-2I$$

۷۱. گزینه ۱ به کمک قضیهٔ کیلی ـ همیلتون، چون $a+d=3+(-3)=0$ و $|A|=-4$؛ پس:

$$A^2+(-4)I=\overline{O}\Rightarrow A^2=4I\xrightarrow{A\cdot}A^3=4A$$

$$\Rightarrow A^3-A^2=4A-4I=4(A-I)$$

$$=4\left(\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=4\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(A^3-A^2)=2\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10\\ -2 & -8\end{bmatrix}\xrightarrow{\det}-12$$

۷۲. گزینه ۳

$$|A|=2\Rightarrow ad-bc=2 \quad (*)$$

$$B^2=2I\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & \sqrt{2}b & 0\\ c & 0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & \sqrt{2}b & 0\\ c & 0 & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1+ac & 0 & a+ad\\ 0 & 2b^2 & 0\\ c+cd & 0 & ac+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+ac=2\Rightarrow ac=1\Rightarrow a\neq 0, c\neq 0\\ 2b^2=2\Rightarrow b=\pm 1\\ a+ad=0\Rightarrow a(1+d)=0\xrightarrow{a\neq 0}d=-1\\ c+cd=0\Rightarrow c(1+d)=0\xrightarrow{c\neq 0}d=-1\\ ac+d^2=2\Rightarrow 1+d^2=2\Rightarrow d^2=1\Rightarrow d=\pm 1\end{cases}$$

پس $b=\pm 1$ و $d=-1$ قابل قبول است؛ بنابراین طبق $(*)$ داریم:

$$ad-bc=2\Rightarrow -a\pm c=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a+c=2\xrightarrow{\times c}-\underbrace{ac}_{1}+c^2=2c\Rightarrow c^2-2c-1=0\Rightarrow c\notin\mathbb{Z}\\ -a-c=2\xrightarrow{\times c}-\underbrace{ac}_{1}-c^2=2c\Rightarrow c^2+2c+1=0\Rightarrow c=-1\end{cases}$$

پس $a=-1$ و طبق $(*)$، $b=1$ قابل قبول است؛ پس:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

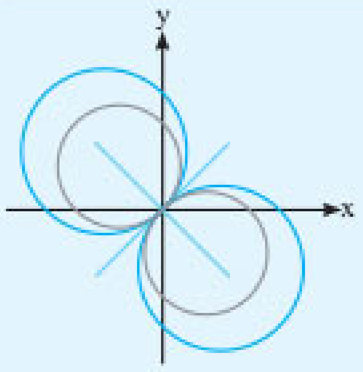
$$B^3=\underbrace{B^2}_{2I}\cdot B=2B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2\sqrt{2} & 0\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

جواب عبارت است از:

$$\text{حاصل‌ضرب درایه‌ها}=(2)(-2)(-2)(-2)(2\sqrt{2})=-32\sqrt{2}$$

۲۵۹. گزینه ۴ مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+kx-2y=0$، نقطهٔ $(-\frac{k}{2},1)$ است.

توجه: از آن‌جایی که دایره در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، یعنی خط $y=x$، مماس می‌باشد، مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم، یعنی خط $y=-x$ قرار می‌گیرد. (چرا؟)



پس نقطهٔ $(-\frac{k}{2},1)$ در معادلهٔ خط $y=-x$ صادق است که از آن‌جا داریم: $k=2$. حال با جای‌گذاری k در معادلهٔ دایره می‌توانیم بنویسیم:

$$x^2+y^2+2x-2y=0\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-2)^2-4(0)}=\sqrt{2}$$

۲۶۰. گزینه ۳ از آن‌جایی که دایرهٔ مفروض بر خطوط $y=2x$ و $x=2y$ مماس است، فاصلهٔ مرکز دایره از دو خط مماس، برابر شعاع دایره می‌باشد:

$$R=\frac{|b-4\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2\sqrt{5}-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}\Rightarrow|b-4\sqrt{5}|=|2\sqrt{5}-2b|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}-2b\Rightarrow b=2\sqrt{5}\\ b-4\sqrt{5}=2b-2\sqrt{5}\Rightarrow b=-2\sqrt{5}\end{cases}$$

به ازای $b=2\sqrt{5}$، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، $R=\frac{|2\sqrt{5}-4\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2$ است.

(به ازای $b=-2\sqrt{5}$، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، $R=\frac{|-2\sqrt{5}-4\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+1^2}}=6$ است.)

۲۶۱. گزینه ۲ اگر مرکز دایره را نقطهٔ $\omega(\alpha,\beta)$ فرض کنیم، چون دایره مماس بر محور yها هست: پس $\alpha=R$. از طرفی، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر شعاع دایره است: یعنی:

$$R=\frac{|4(\alpha)+3(\beta)|}{\sqrt{4^2+3^2}}\xrightarrow{\alpha=R}R=\frac{|4R+3\beta|}{5}$$

$$\Rightarrow 5R=\pm(4R+3\beta)\Rightarrow\begin{cases}R=3\beta\Rightarrow\beta=\frac{R}{3}\\ 9R=-3\beta\Rightarrow\beta=-3R\end{cases}$$

پس دو معادله به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}(x-R)^2+(y-\frac{R}{3})^2=R^2\\ \xrightarrow[A(1,-4)]{A\text{ را صدق می‌دهیم}}(1-R)^2+(-4-\frac{R}{3})^2=R^2\\ (x-R)^2+(y+3R)^2=R^2\\ \xrightarrow{A\text{ را صدق می‌دهیم}}(1-R)^2+(-4+3R)^2=R^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+R^2-2R+16+\frac{R^2}{9}+\frac{8R}{3}=R^2\\ \Rightarrow R^2+6R+153=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow\text{ریشه ندارد.}\\ 1+R^2-2R+16+9R^2-24R=R^2\\ \Rightarrow 9R^2-26R+17=0\Rightarrow R=1,\frac{17}{9}\end{cases}$$

۲۶۲. گزینه ۱ چون دایره بر خط $y=0$ (محور xها) مماس است: پس اگر مرکز دایره، نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ فرض شود، آن‌گاه $\beta=R$. اکنون فاصلهٔ نقطهٔ O' تا خط مماس $3x-4y=0$ را برابر با شعاع دایره قرار می‌دهیم.

$$R=\frac{|3(\alpha)-4(R)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\Rightarrow 5R=\pm(3\alpha-4R)\Rightarrow\alpha=3R,-\frac{R}{3}$$

اما دایره از نقطهٔ $A(3,2)$ در ناحیهٔ اول می‌گذرد: پس $\alpha=3R$ قابل قبول است. اکنون معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $(3R,R)$ و شعاع R را می‌نویسیم:

$$(x-3R)^2+(y-R)^2=R^2$$

$$\xrightarrow{A\text{ را صدق می‌دهیم}}(3-3R)^2+(2-R)^2=R^2$$

$$\Rightarrow 9R^2-22R+13=0\Rightarrow R=1,\frac{13}{9}$$

که کوچک‌ترین شعاع برابر ۱ است.

۲۶۳. گزینه ۳ در ابتدا باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر شوند: پس $k=\frac{1}{k}$ که از آن‌جا $k=\pm1$ می‌شود. حالا برای هر یک از مقادیر به‌دست آمدهٔ k، معادلهٔ دایره را نوشته و شرط وجود دایره را در هر کدام بررسی می‌کنیم:

$$k=+1\Rightarrow x^2+y^2=2x+1^2-3\Rightarrow x^2+y^2-2x+2=0$$

عبارت a^2+b^2-4c در این معادله برابر $(-2)^2+0-4\times2=-4$ می‌باشد و از آن‌جایی که عددی منفی است، دایره نیست.

$$k=-1\Rightarrow -x^2-y^2=2x+(-1)^2-3\Rightarrow x^2+y^2+2x-2=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=(2)^2+0-4(-2)=12>0$$

پس به ازای $k=-1$، یک دایره به‌دست می‌آید.

۲۶۴. گزینه ۴ نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ C به مرکز ω و شعاع R برابر $|d-R|$ است (که d فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره است) شعاع دایرهٔ $(x+3)^2+(y-4)^2=4$ برابر ۲ و اندازهٔ d عبارت است از:

$$d=|A\omega|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5\Rightarrow|d-R|=5-2=3$$

۲۶۵. گزینه ۴ از تقاطع قطرهای دایره، مختصات مرکز دایره به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=2\ ,\ y=-1\xrightarrow{\text{مرکز دایره}}O'(2,-1)$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر با شعاع دایره است: پس فاصلهٔ نقطهٔ $O'(2,-1)$ از خط مماس $4x+3y+5=0$ عبارت است از:

$$R=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

برای یافتن نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(4,-2)$ از دایره، ابتدا فاصلهٔ M از مرکز دایره را می‌یابیم: $d=|MO'|=\sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$

با توجه به مطلب گفته‌شده در درسنامه، نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره، برابر است با: $|d-R|=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

۲۶۶. گزینه ۱ ابتدا وضعیت نقطهٔ A را نسبت به دایره تعیین می‌کنیم. برای این کار مختصات نقطهٔ $A(0,-2)$ را در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$f(0,-2)=0+(-2)^2-2(0)+4(-2)-1<0$$

بنابراین نقطهٔ A داخل دایره است: پس از این نقطه هیچ مماسی بر دایره نمی‌توان رسم کرد.

۲۶۷. گزینه ۲ طول وتر مینیمم گذرا از نقطهٔ $(-1,2/5)$ موردنظر است. که برابر با $2\sqrt{|f(-1,2/5)|}$ می‌باشد. ابتدا معادلهٔ دایره را ساده می‌کنیم:

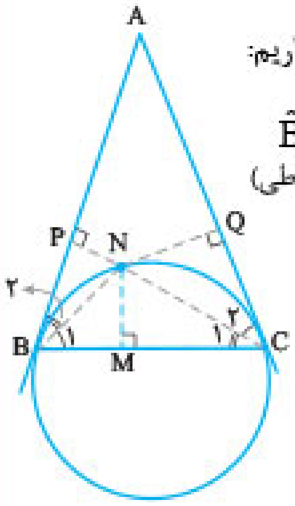
$$x^2+y^2-3x-5y+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow f(-1,2/5)=(-1)^2+(2/5)^2-3(-1)-5(2/5)+\frac{1}{2}=\frac{-7}{4}$$

پس جواب برابر است با:

$$2\sqrt{|f(-1,2/5)|}=2\sqrt{|-\frac{7}{4}|}=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$$

۶۴۴. گزینه ۲



از نقطهٔ N به رأس‌های B و C وصل می‌کنیم و داریم:

$$\underset{(\text{محاطی})}{\hat{B}_۱}=\underset{(\text{ظلی})}{\hat{C}_۲}=\frac{\widehat{NC}}{۲}\quad\text{و}\quad\underset{(\text{محاطی})}{\hat{C}_۱}=\underset{(\text{ظلی})}{\hat{B}_۲}=\frac{\widehat{BN}}{۲}$$

بنابراین تشابه‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases}\overset{\triangle}{NPB}\sim\overset{\triangle}{NMC}\Rightarrow\dfrac{NP}{MN}=\dfrac{NB}{NC}\\ \overset{\triangle}{NMB}\sim\overset{\triangle}{NQC}\Rightarrow\dfrac{NM}{NQ}=\dfrac{NB}{NC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{NP}{NM}=\frac{NM}{NQ}\Rightarrow NP\times NQ=NM^۲$$

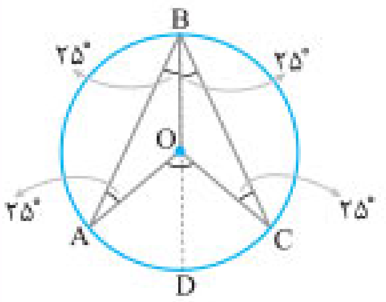
۶۴۵. گزینه ۲ واضح است که مثلث OBC متساوی‌الساقین است (زیرا $OB=OC=R$)، پس $\hat{B}=۵۵^\circ$ و به دلیل توازی $CB\parallel OE$ و مورب بودن BO، نتیجه می‌گیریم $B\hat{O}E=۵۵^\circ$ و چون این زاویه، یک زاویهٔ مرکزی است، پس $\widehat{BE}=۵۵^\circ$. از طرفی در مثلث OBC داریم:

$$B\hat{O}C=۱۸۰^\circ-۲\times۵۵^\circ=۷۰^\circ\xrightarrow{\text{متقابل‌به‌رأس}}A\hat{O}D=۷۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{مرکزی}}\widehat{AD}=۷۰^\circ$$

بنابراین جواب مسئله، $\widehat{AD}-\widehat{BE}=۷۰^\circ-۵۵^\circ=۱۵^\circ$ است.

۶۴۶. گزینه ۲ با توجه به متساوی‌الساقین بودن دو مثلث OAB و OBC (زیرا $OA=OB=OC=R$)، درمی‌یابیم که $A\hat{B}O=C\hat{B}O=۲۵^\circ$. حال اگر BO را امتداد دهیم تا کمان AC را در نقطهٔ D قطع نماید، آن‌گاه:



$$\begin{cases}A\hat{B}O=۲۵^\circ\xrightarrow{\text{محاطی}}\\ \dfrac{\widehat{AD}}{۲}=۲۵^\circ\Rightarrow\widehat{AD}=۵۰^\circ\end{cases}$$

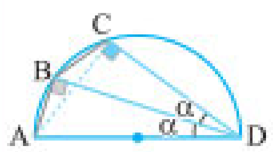
$$\begin{cases}C\hat{B}O=۲۵^\circ\xrightarrow{\text{محاطی}}\\ \dfrac{\widehat{DC}}{۲}=۲۵^\circ\Rightarrow\widehat{DC}=۵۰^\circ\end{cases}$$

از طرفی زاویهٔ AOC، یک زاویهٔ مرکزی است، پس: $A\hat{O}C=\widehat{AC}=۱۰۰^\circ$

۶۴۷. گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$AB=BC\Rightarrow\widehat{AB}=\widehat{BC}$$

پس دو زاویهٔ محاطی BDC و ADB با هم برابرند و اگر هرکدام را α فرض کنیم، داریم:



$$\underset{(\hat{B}=۹۰^\circ)}{\overset{\triangle}{ABD}}:\sin\alpha=\frac{AB}{AD}=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی می‌دانیم $\cos۲\alpha=۲\sin^۲\alpha-۱$ و در نتیجه

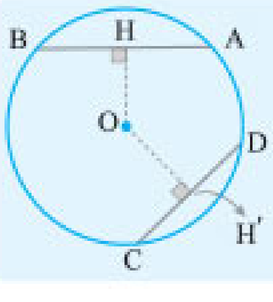
$\cos۲\alpha=۲(\frac{۱}{۴})^۲-۱=\frac{۷}{۸}$:پس:

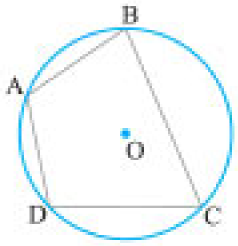
$$\underset{(\hat{C}=۹۰^\circ)}{\overset{\triangle}{ACD}}:\cos۲\alpha=\frac{CD}{AD}\Rightarrow\frac{۷}{۸}=\frac{CD}{۴}\Rightarrow CD=\frac{۷}{۲}$$

۶۴۸. گزینه ۴

راهبرد: در دایرهٔ $C(O,R)$ داریم:

$$OH<OH'\Leftrightarrow AB>CD$$





طبق راهبرد، AB کوچک‌ترین ضلع و BC بزرگ‌ترین ضلع چهارضلعی ABCD است و در نتیجه از بین کمان‌ها، $\widehat{AB}$ کوچک‌ترین کمان و $\widehat{BC}$ بزرگ‌ترین کمان است؛ بنابراین:

$$\widehat{BC}>\widehat{AD}\Rightarrow\widehat{BC}+\widehat{AB}>\widehat{AD}+\widehat{AB}\Rightarrow\widehat{ABC}>\widehat{DAB}$$
$$\Rightarrow\hat{D}>\hat{C}$$
$$\widehat{CD}>\widehat{AB}\Rightarrow\widehat{CD}+\widehat{AD}>\widehat{AB}+\widehat{AD}\Rightarrow\widehat{CDA}>\widehat{DAB}$$
$$\Rightarrow\hat{B}>\hat{C}$$
$$\widehat{BC}>\widehat{AD}\Rightarrow\widehat{BC}+\widehat{CD}>\widehat{AD}+\widehat{CD}\Rightarrow\widehat{BCD}>\widehat{ADC}$$
$$\Rightarrow\hat{A}>\hat{B}$$

اما لزوماً $\hat{B}>\hat{D}$ درست نیست.

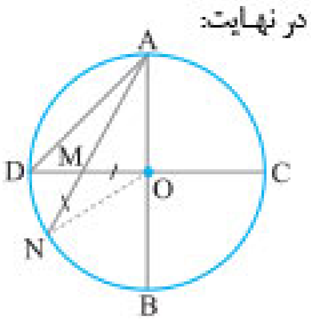
۶۴۹. گزینه ۱ طبق فرض مسئله می‌دانیم مثلث OMN متساوی‌الساقین است. بنابراین:

$$O\hat{N}A=N\hat{O}D=\frac{\widehat{ND}}{۲}$$

از طرفی مثلث ONA نیز متساوی‌الساقین است ($OA=ON$)، پس:

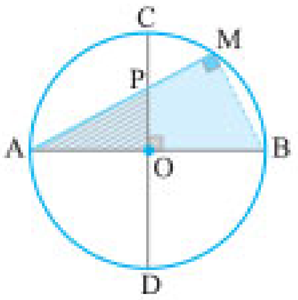
$$O\hat{N}A=O\hat{A}N=\frac{\widehat{NB}}{۲}$$

بنابراین $\widehat{ND}=\frac{\widehat{NB}}{۲}$ و در نتیجه $\widehat{NB}=۲\widehat{ND}$ و در نهایت:



$$\widehat{ND}+\widehat{NB}=۹۰^\circ\Rightarrow۳\widehat{ND}=۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow\widehat{ND}=۳۰^\circ$$
$$N\hat{A}D=\frac{\widehat{ND}}{۲}=\frac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$

۶۵۰. گزینه ۲ اگر از M به B وصل کنیم، آن‌گاه مثلث AMB در رأس M قائم‌الزاویه است و در نتیجه با توجه به زاویهٔ مشترک A، دو مثلث AMB و AOP متشابه‌اند. داریم:



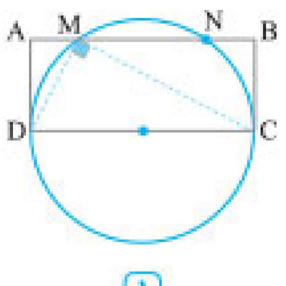
$$\overset{\triangle}{AMB}\sim\overset{\triangle}{AOP}\Rightarrow\frac{AB}{AP}=\frac{AM}{AO}$$
$$\Rightarrow AP\times AM=AO\times AB$$

۶۵۱. گزینه ۳ شکل صورت مسئله را رسم می‌کنیم (شکل ۱) و از M به دو سر قطر وصل می‌کنیم. ($\hat{M}=۹۰^\circ$، چون زاویهٔ M محاطی رو به قطر است.) ارتفاع مثلث MCD را رسم کرده و قطعه‌های ایجادشده را x و $۱۳-x$ فرض می‌کنیم (شکل ۲). با توجه به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ MCD داریم:

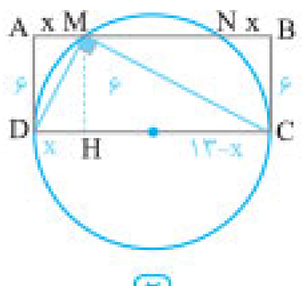
$$MH^۲=DH\times CH\Rightarrow۶^۲=x(۱۳-x)\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰$$
$$\Rightarrow(x-۴)(x-۹)=۰\Rightarrow x=۴\ \text{یا}\ ۹$$

حال طول MN را به‌دست می‌آوریم:

$$MN=AB-AM-BN=۱۳-۴-۴=۵$$



۱



۲

۱۵۵۵. گزینه ۲ از آن‌جایی که اندازهٔ سه ضلع مثلث، اعداد فیثاغورسی است، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است $(۹^۲+۱۲^۲=۱۵^۲)$.

در هر مثلث، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود، پس ارتفاع وارد بر وتر (AH)، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است (شکل ۱).

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است؛ پس $AM=BM=CM=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$ است (شکل ۲).

با توجه به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۹^۲=BH\times ۱۵\Rightarrow BH=\frac{۲۷}{۵}$$

$$\Rightarrow MH=BM-BH=\frac{۱۵}{۲}-\frac{۲۷}{۵}=۲/۱$$

حال با توجه به اینکه در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را با نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم (شکل ۳):

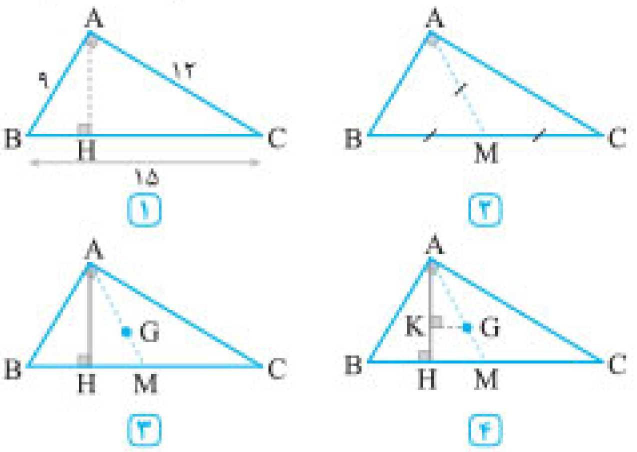
$$AG=۲GM\Rightarrow AG=\frac{۲}{۳}AM$$

حال از نقطهٔ همرسی میانه‌ها (نقطهٔ G) بر ارتفاع AH عمود GK را رسم می‌کنیم (شکل ۴)، با توجه به اینکه GK و MH هر دو بر AH عمود هستند، نتیجه می‌گیریم GK و MH با هم موازی هستند.

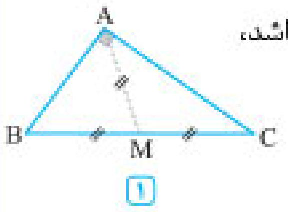
حال به کمک قضیهٔ تالس در مثلث AHM داریم:

$$GK\parallel MH\Rightarrow \frac{GK}{MH}=\frac{AG}{AM}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow GK=\frac{۲}{۳}MH=\frac{۲}{۳}\times ۲/۱=۱/۴$$



۱۵۵۶. گزینه ۲ اگر نقطه‌ای از سه رأس یک مثلث به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه، محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث است. اگر محل همرسی عمودمنصف‌های یک مثلث روی یک ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه و نقطهٔ مفروض (M) وسط وتر قرار دارد (شکل ۱).



از نقطهٔ M بر دو ضلع AB و AC دو عمود MD و ME را رسم می‌کنیم (شکل ۲). چهارضلعی $ADME$ مستطیل است و با توجه به اینکه MD و ME عمودمنصف‌های AB و AC هستند، داریم:

$$\begin{cases}MD=AE=EC=۱۲\\ ME=AD=DB=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AC=۲AE=۲۴\\ AB=۲AD=۱۸\end{cases}$$

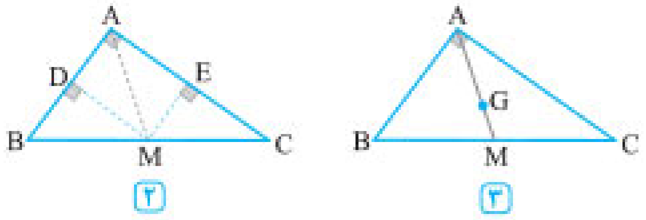
$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}BC^۲=AB^۲+AC^۲=۱۸^۲+۲۴^۲$$

$$=(۳\times۶)^۲+(۴\times۶)^۲=۶^۲(۳^۲+۴^۲)=۶^۲\times۵^۲=۳۰^۲\Rightarrow BC=۳۰$$

حال با توجه به اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است و اینکه در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را با نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند (شکل ۳).

بنابراین:

$$\begin{cases}AM=\frac{BC}{۲}=۱۵\\ AG=۲GM\end{cases}\Rightarrow GM=\frac{AM}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$



۱۵۵۷. گزینه ۴ در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند (شکل ۱).

$$\frac{GM}{AG}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{GM}{AM}=\frac{۱}{۳}$$

در مثلث ABM (شکل ۲) طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$GD\parallel AB\Rightarrow\frac{MD}{BM}=\frac{GM}{AM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MD=\frac{۱}{۳}BM \quad ۱$$

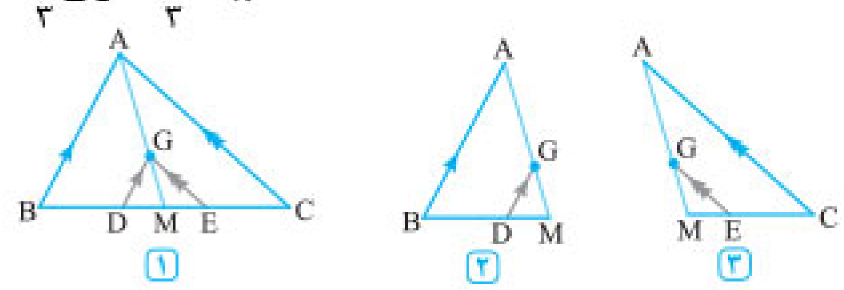
در مثلث ACM (شکل ۳) طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$GE\parallel AC\Rightarrow\frac{ME}{CM}=\frac{GM}{AM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ME=\frac{۱}{۳}CM \quad ۲$$

اکنون طبق ۱ و ۲ داریم:

$$DE=MD+ME=\frac{۱}{۳}BM+\frac{۱}{۳}CM=\frac{۱}{۳}(BM+CM)$$

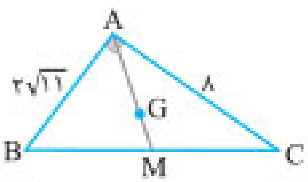
$$=\frac{۱}{۳}BC=\frac{۲۴}{۳}=۸$$



۱۵۵۸. گزینه ۲ با محاسبهٔ طول وتر مثلث ABC داریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=(۲\sqrt{۱۱})^۲+۸^۲=۴۴+۶۴=۱۰۸=۳\times۳۶$$

$$\Rightarrow BC=۶\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{میانهٔ وارد بر وتر}}AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$



حال طول GM را با استفاده از طول میانه AM به دست می‌آوریم:

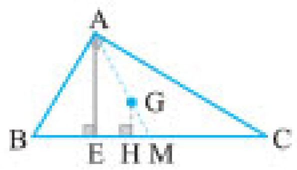
$$GM=\frac{AM}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$$

۱۵۵۹. گزینه ۲ طول وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $BC=۱۰$ است: برای محاسبهٔ GH، ارتفاع AE را رسم می‌کنیم.

در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند؛ پس طبق قضیهٔ تالس در مثلث AEM داریم:

$$GH\parallel AE\Rightarrow\frac{GH}{AE}=\frac{GM}{AM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow GH=\frac{AE}{۳} \quad *$$

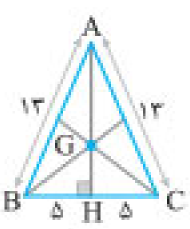
برای به دست آوردن طول GH باید طول ارتفاع AE را به دست آوریم؛ بنابراین:



$$AE=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۶\times۸}{۱۰}=۴/۸$$

$$\xrightarrow{*}GH=\frac{۴/۸}{۳}=۱/۶$$

۱۵۶۰. گزینه ۳ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی میانه‌ها، از رأس روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، دورترین است: پس مطابق شکل باید طول AG را به دست آوریم:

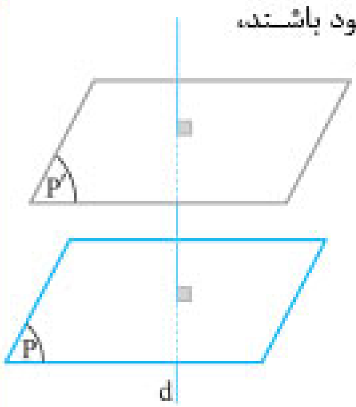


$$AH \text{ هم ارتفاع و هم میانه } AH\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}\overset{\triangle}{ABH}:AB^۲=AH^۲+BH^۲$$

$$\Rightarrow ۱۳^۲=AH^۲+۵^۲\Rightarrow AH=۱۲\Rightarrow AG=\frac{۲}{۳}AH=\frac{۲}{۳}\times۱۲=۸$$

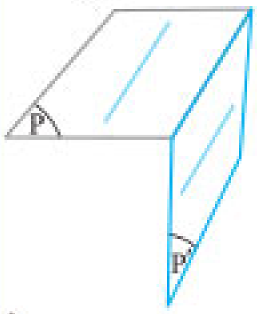
۱۵۹۳. گزینهٔ ۴ اگر دو صفحه بر خطی عمود باشند، آن‌گاه آن دو صفحه با یکدیگر موازی هستند.

$$\begin{cases} P \perp d \\ P' \perp d \end{cases} \Rightarrow P \parallel P'$$

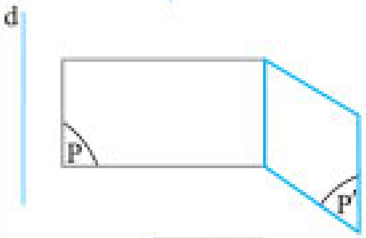


برای سایر گزینه‌ها می‌توان مثال نقضی را یافت که دو صفحه متقاطع باشند.

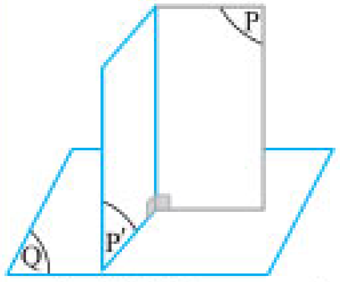
گزینهٔ «۱»:



گزینهٔ «۲»:



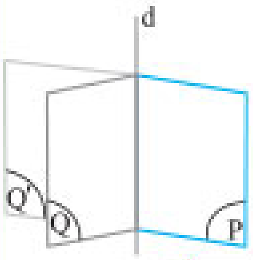
گزینهٔ «۳»:



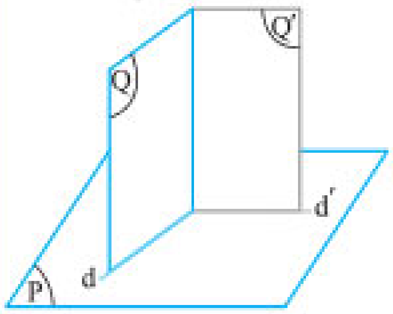
۱۵۹۴. گزینهٔ ۴ چون فصل مشترک‌های موردنظر در صفحهٔ P قرار دارند، سپس نمی‌توانند متنافر باشند. (هیچ‌گاه دو خط متنافر در یک صفحه قرار نمی‌گیرند.)

مطابق شکل‌های زیر، سایر حالت‌ها می‌توانند رخ دهند.

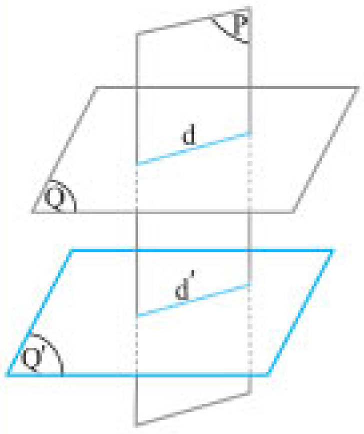
گزینهٔ «۱»: حالت یک خط



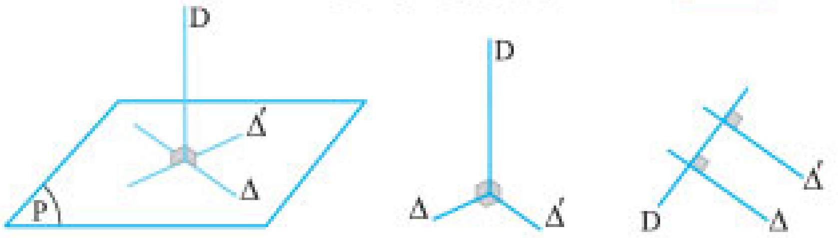
گزینهٔ «۲»: حالت دو خط متقاطع



گزینهٔ «۳»: حالت دو خط موازی



۱۵۹۵. گزینهٔ ۱ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



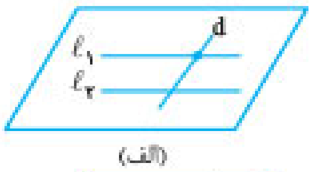
یعنی هر سه **گزینهٔ «۲»، «۳» و «۴»** می‌توانند درست باشند، پس در حالت کلی وضعیت Δ و Δ' غیرمشخص است.

۱۵۹۶. گزینهٔ ۳ **گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴»** صورت قضایای کلی و یا نتایج آن‌ها بوده که در درسنامه به آن اشاره شده است.

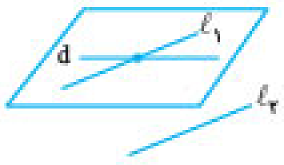
در مورد **گزینهٔ «۳»** فرض می‌کنیم که P و P' دو صفحهٔ موازی باشند، در این‌صورت اگر صفحهٔ Q یکی از آن‌ها را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند و $Q \cap P$ و $Q \cap P'$ دو خط موازی هستند.

۱۵۹۷. گزینهٔ ۳ تصویر خط d' بر صفحهٔ P یک نقطه است؛ بنابراین خط d' بر صفحهٔ P عمود است و بنابراین، خط d' بر همهٔ خطوط واقع در صفحهٔ P (از جمله خط d) عمود است.

۱۵۹۸. گزینهٔ ۴ در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آن‌گاه با دیگری متقاطع یا متنافر است.



(الف)

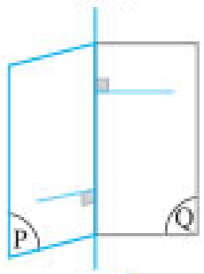


(ب)

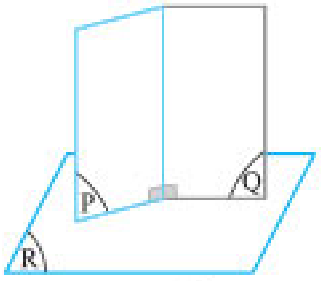
الف) خط d با هر دو خط ℓ_1 و ℓ_2 هم‌صفحه است؛ پس اگر خط d با خط ℓ_1 متقاطع باشد، با ℓ_2 نیز متقاطع است.

ب) خط d با خط ℓ_1 هم‌صفحه و با خط ℓ_2 غیرهم‌صفحه است؛ پس خط d با خط ℓ_2 متنافر است.

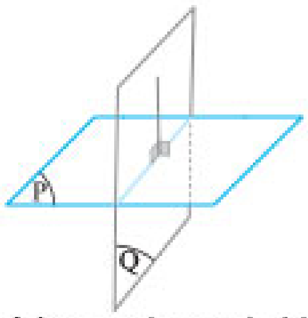
۱۵۹۹. گزینهٔ ۴ **گزینه‌های «۱» و «۲»**، با توجه به شکل نادرست هستند.



گزینهٔ «۳»: نادرست است، زیرا در شکل مقابل دو صفحهٔ P و Q بر صفحهٔ R عمود هستند، ولی P و Q بر هم عمود نیستند.



گزینهٔ «۴»: حالتی را مشخص می‌کند که صفحهٔ P بر Q عمود باشد.



۱۶۰۰. گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در نقطهٔ برخورد آن‌ها عمود باشد، آن‌گاه این خط بر صفحه و تمام خط‌های واقع بر آن صفحه، عمود است.

خط d بر صفحهٔ P عمود است و خط Δ درون صفحهٔ P است؛ پس خط d بر خط Δ عمود است. از طرف دیگر خط Δ بر OH و OA عمود است، در نتیجه خط Δ بر صفحهٔ مثلث OAH عمود است و در نهایت خط Δ بر AH عمود است.